A1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 7/9/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/ incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + w - z = 2 \\ x - 2y + 2w + z = -3 \\ 4x - 3y + 5w + z = -4 \\ 3x + 4y - 3z = 7 \end{cases}$$

2) I vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ formano un angolo di 150^o, $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$. Calcolare il coseno dell'angolo formato dai vettori $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x) = 4x\left(\log_3 x\right)^2$.

4) Determinare il baricentro dell'area del primo quadrante limitata dalla parabola $y = 2 + x - x^2$.

1) SCAMBIAMO 1ª E 2ª RIGA E POI RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - 4A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 10 & -6 & -6 & 16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE ∞^{4-2} SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - 2y + 2w + z = -3 \\ 5y - 3w - 3z = 8 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{8 + 3s + 3t}{5}$$

$$x = -3 + 2y - 2w - z = -3 + \frac{16 + 6s + 6t}{5} - 2s - t \overset{!}{=} \frac{1 - 4s + t}{5}.$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos 150^\circ = 2\cdot\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3$.

$\|2\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 4\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 4 + 3 + 4\cdot(-3) = 7$;

$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 4 + 3 - 2(-3) = 13$;

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 2\|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \|\vec{b}\|^2$$

$$= 2\cdot 4 - (-3) - 3 = 8 ;$$

INDICATO CON α L'ANGOLO FRA $2\vec{a}+\vec{b}$ E $\vec{a}-\vec{b}$ ABBIAMO:

$$\cos\alpha = \frac{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{\|2\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|} = \frac{8}{\sqrt{7}\,\sqrt{13}} .$$

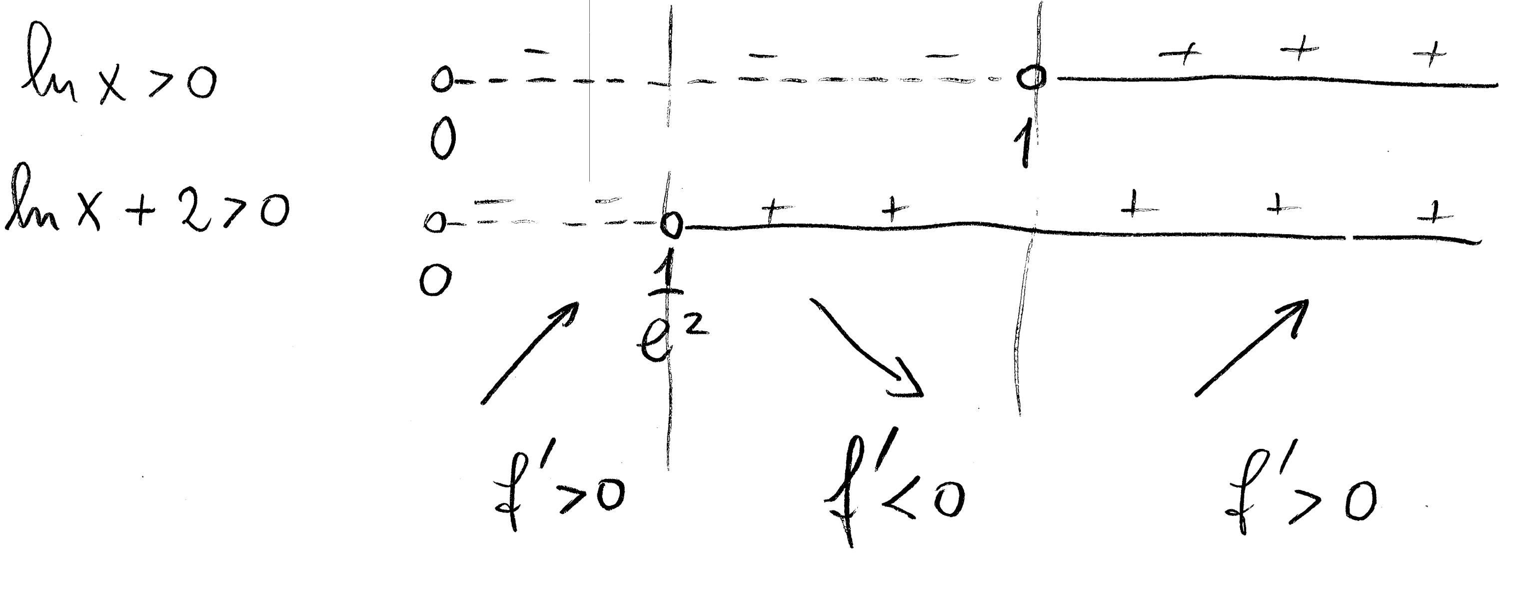
3) $f(x)$ E' DEFINITA PER $x>0$, INOLTRE

$$f(x) = 4x(\log_3 x)^2 = 4x\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)^2 = \frac{4}{(\ln 3)^2}\,x(\ln x)^2$$

QUINDI

$$f'(x) = \frac{4}{(\ln 3)^2}\left[(\ln x)^2 + 2\ln x\right] = \frac{4}{(\ln 3)^2}\ln x(\ln x + 2)$$

PER $x>0$.



$\Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{e^2}$ E' MAX REL. ; $x = 1$ E' MIN. REL.

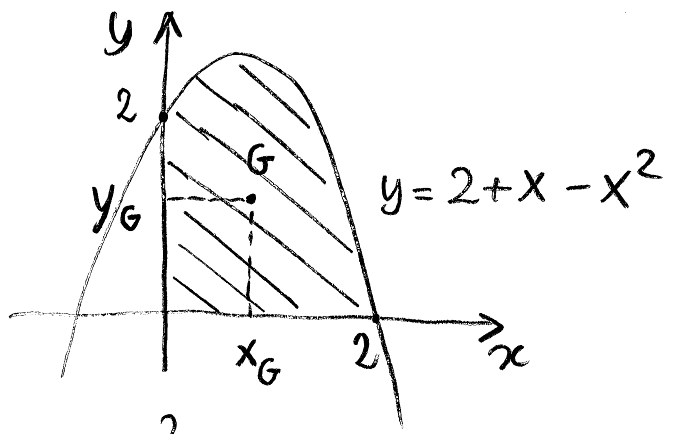
INOLTRE, POICHE' $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x = \dfrac{1}{e^2}$ NON E' MAX ASSOLUTO.

POICHE' $f(x) > 0$ PER $x > 0, x \neq 1$ MENTRE

$f(1) = 0$, $\quad x = 1$ E' MIN. ASSOLUTO.

4)



$$A = \int_0^2 (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

$$M_y = \int_0^2 x(2 + x - x^2)\,dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \, ;$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 (2 + x - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4 + 4x - 3x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[4x + 2x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{16}{5} .$$

$$x_G = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5} \, , \quad y_G = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{10}{3}} = \frac{24}{25} .$$

B1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria

7/9/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/ incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+y+w-z=3 \\ x-2y+2w+z=1 \\ 4x-3y+5w+z=5 \\ x+3y-w-2z=2 \end{cases}$$

2) I vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ formano un angolo di 120°, $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=3$. Calcolare il coseno dell'angolo formato dai vettori $3\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x)=x(\ln x)^2-3x\ln x+x$.

4) Determinare il baricentro dell'area del secondo quadrante limitata dalla parabola $y=2-x-x^2$.

1) SCAMBIAMO 1ª E 2ª RIGA E POI RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_1]{A_2-2A_1,\ A_3-4A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Car}(A) = \mathrm{Car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE ∞^{4-2} SOLUZIONI.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x-2y+2w+z=1 \\ 5y-3w-3z=1 \end{cases}$$

POSTO $w=s$, $z=t$ $\quad s,t\in\mathbb{R}$,

RICAVIAMO $y=\dfrac{1+3s+3t}{5}$

$x = 1+2y-2w-z = 1+\dfrac{2+6s+6t}{5}-2s-t$

$\overset{!}{=} \dfrac{7-4s+t}{5}$.

B2

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos 120° = 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

$$\|3\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (3\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b}) = 9\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= 9\cdot 1 + 9 + 6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = 9;$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 + 9 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 13;$$

$$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 3\|\vec{a}\|^2 - 3\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \|\vec{b}\|^2$$
$$= 3\cdot 1 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 9 = -3.$$

INDICATO CON α L'ANGOLO FRA $3\vec{a}+\vec{b}$ E $\vec{a}-\vec{b}$ ABBIAMO:

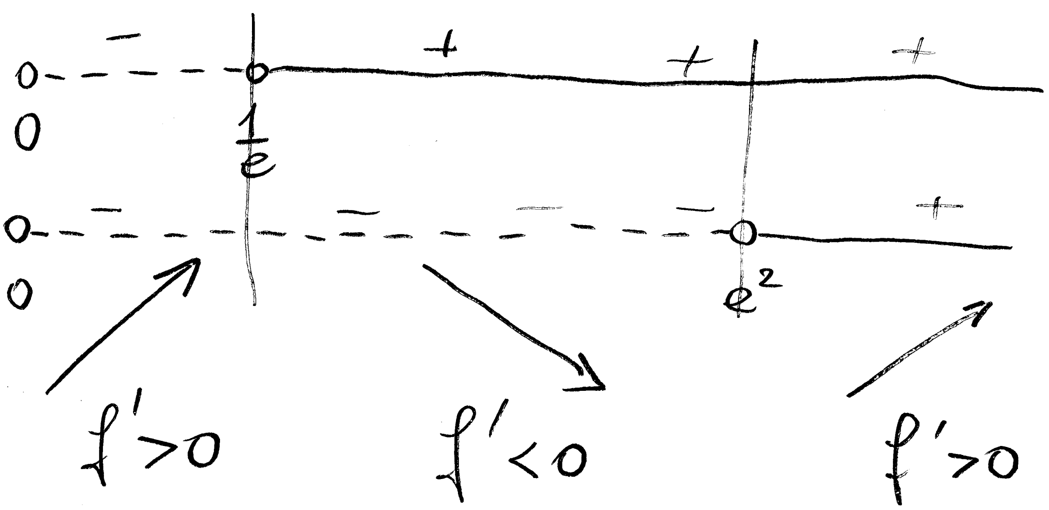
$$\cos\alpha = \frac{(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{\|3\vec{a}+\vec{b}\|\,\|\vec{a}-\vec{b}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA PER $x>0$. CALCOLIAMO LA DERIVATA:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2x\ln x\,\frac{1}{x} - 3\ln x - 3x\,\frac{1}{x} + 1$$
$$= (\ln x)^2 - \ln x - 2$$
$$= (\ln x + 1)(\ln x - 2) \quad \text{PER } x>0.$$

$\ln x + 1 > 0$

$\ln x - 2 > 0$



$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{e}$ E' MAX REL. ; $x = e^2$ E' MIN. REL.

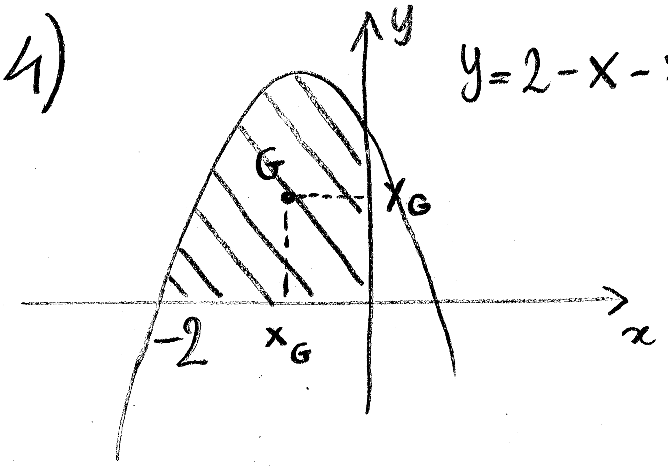
INOLTRE, POICHE' $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

$x = \frac{1}{e}$ NON E' MAX ASSOLUTO.

POICHE' $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$ E $f(e^2) = -e^2 < 0$

$X = e^2$ E' MIN. ASSOLUTO.

4)



$y = 2 - x - x^2$

$$A = \int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{10}{3};$$

$$M_y = \int_{-2}^{0} x \cdot (2 - x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = -\frac{8}{3};$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (4 - 4x - 3x^2 + 2x^3 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[4x - 2x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = \frac{16}{5}.$$

$$X_G = \frac{M_y}{A} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{4}{5} \;;\; Y_G = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{10}{3}} = \frac{24}{25}.$$