Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - w + z = 1 \\ 3x + y + w + 2z = 2 \\ x + 5y + 3w = 0 \\ 3x + 8y + 5w + z = 1 \end{cases}$$

3) Dato il triangolo ABC di vertici $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 3, 0)$, $C = (1, 0, -4)$ calcolare l'altezza relativa al lato AB.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \quad \frac{x-1}{2} = 2y + 1 = \frac{z+2}{3}$$

con il piano π passante per $P(1, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

1) $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |C| = -1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1(16-12) = -4$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 3A_1]{A_2 - 3A_1,\ A_3 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 14 & 8 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad car(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

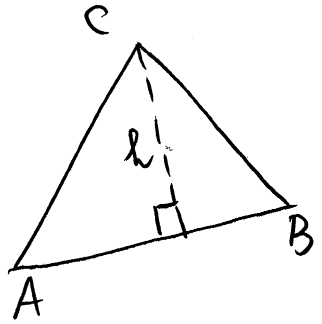
$$\begin{cases} x - 2y - W + z = 1 \\ 7y + 4W - z = -1 \end{cases}$$

$$y = \frac{-1-4w+z}{7}, \quad x = 2y+w-z+1 = \frac{5-w-5z}{7} \quad A$$

SOL: $x = \dfrac{5-s-5t}{7}$, $y = \dfrac{-1-4s+t}{7}$, $w=s$, $z=t$

CON $s, t \in \mathbb{R}$.

3)



$$h = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} \qquad \vec{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{AC} = \vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -22\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$h = \frac{\sqrt{22^2+6^2+1}}{\sqrt{1+4^2+2^2}} = \frac{\sqrt{521}}{\sqrt{21}}$$

4) IL PIANO π HA EQUAZIONE

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(x-1) - (y-1)(-3) - 4z$$
$$\Rightarrow -2x + 3y - 4z - 1 = 0$$

$$\begin{cases} -2x+3y-4z-1=0 \\ x = 4y+3 \\ z = 6y+1 \end{cases} \Rightarrow -2(4y+3)+3y-4(6y+1)-1=0$$
$$-29y - 11 = 0 \Rightarrow y = -\frac{11}{29}$$

$$x = 4\left(-\frac{11}{29}\right)+3 = \frac{43}{29}, \quad z = 6\left(-\frac{11}{29}\right)+1 = -\frac{37}{29}$$

INTERSEZIONE $\left(\dfrac{43}{29}, -\dfrac{11}{29}, -\dfrac{37}{29}\right)$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare l'inversa della matrice $B = AA$.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 2y + w + z = -1 \\ x - y + 2w - z = 1 \\ -x + 5y - 5w + 4z = -4 \\ 2x + 10y - 5w + 7z = -7 \end{cases}$$

3) Dato il parallelogramma $ABCD$ di vertici $A = (0,0)$, $B = (5,3)$, $C = (7,12)$, $D = (2,9)$, siano M ed N i punti che dividono la diagonale BD in tre parti uguali. Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$.

4) Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto $A(2,-1,-1)$ e per la retta

$$r: \quad x + y - z = -2, \; 2x - y + z = 4.$$

1)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 4\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4(-14) - 6(-10) = 4$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ -6 & 4 & -3 \\ \frac{9}{2} & -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 10 & -5 & 7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_1]{A_2 - 2A_1,\ A_3 + A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -9 & 9 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 3A_2]{A_3 - A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

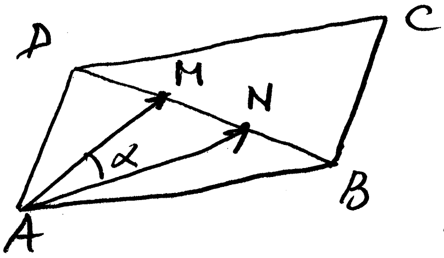
car(A) = car$(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - y + 2w - z = 1 \\ 4y - 3w + 3z = -3 \end{cases}$$

$y = \dfrac{-3+3w-3z}{4}$, $x = y-2w+z+1 = \dfrac{1-5w+z}{4}$ B

SOL: $x = \dfrac{1-5s+t}{4}$, $y = \dfrac{-3+3s-3t}{4}$, $w=s$, $z=t$
con $s,t \in \mathbb{R}$

3) 

$\vec{AB} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{BD} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$

$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BD} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$

$\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AM}\cdot\vec{AN}}{\|\vec{AM}\|\cdot\|\vec{AM}\|} = \frac{3\cdot 4 + 7\cdot 5}{\sqrt{3^2+7^2}\,\sqrt{4^2+5^2}} = \frac{47}{\sqrt{58}\,\sqrt{41}}$$

4) SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI PIANI PASSANTI PER LA RETTA r:

$$\lambda(x+y-z+2)+\mu(2x-y+z-4)=0$$

IMPONIAMO ORA CHE IL PIANO PASSI PER $A(2,-1,-1)$:

$$\lambda(2-1+1+2)+\mu(4+1-1-4)=0$$

$$4\lambda = 0$$

POSSIAMO QUINDI PRENDERE $\lambda=0$, $\mu=1$.
IL PIANO CERCATO E'

$$2x-y+z-4=0$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 C

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'inversa della matrice $B = AA$,

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - 3w - 2z = 0 \\ x + y - w - z = -2 \\ 3x - 5w - 4z = -4 \\ 2x - 7y - 8w - 5z = 2 \end{cases}$$

3) Dato il triangolo ABC di vertici $A = (3, -1, 0)$, $B = (2, 3, -1)$, $C = (1, 0, -4)$ calcolare l'altezza relativa al lato AB.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2}, \; z = 5$$

con il piano π passante per $P(-1, 4, 2)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1)

$$C = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ -3 & 4 & -3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad |C| = 4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-2) + 6 \cdot 2 = 4$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 & -4 & -4 \\ 2 & -7 & -8 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_2 - 2A_1]{\substack{A_2 - A_1 \\ A_3 - 3A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 + A_2]{A_3 - 2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CAR (A) = CAR (A|B) = 2 $\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

C

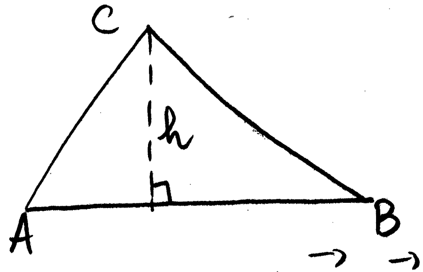
$$\begin{cases} x-2y-3w-2z=0 \\ 3y+2w+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{-2-2w-z}{3}$$

$$x = 2y+3w+2z = \frac{-4+5w+4z}{3}$$

SOL: $x = \dfrac{-4+5s+4t}{3}$, $y = \dfrac{-2-2s-t}{t}$, $w=s$, $z=t$

CON $s,t \in \mathbb{R}$.

3)



$$h = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\vec{AB} = -\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$$
$$\vec{AC} = -2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{15^2+2^2+7^2}}{\sqrt{1+4^2+1}} = \frac{\sqrt{278}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{139}}{3}$$

4) IL PIANO π HA EQUAZIONE $-1(x+1)+2(y-4)-1\cdot(z-2)=0$

$$-x+2y-z-7=0$$

$$\begin{cases} -x+2y-z-7=0 \\ z=5 \\ 2x+4=3y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=12 \\ 2x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=23 \\ x=34 \end{cases}$$

INTERSEZIONE $(34, 23, 5)$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 D

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2+\alpha \\ \alpha & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ \alpha-1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro α la matrice $C = AB$ è invertibile.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3w + z = -2 \\ x - y + 2w + 3z = 2 \\ x + 4y + w - 2z = -4 \\ x - 6y + 3w + 8z = 8 \end{cases}$$

3) Nel piano xy scomporre il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ nella somma di due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ con $\mathbf{v}$ parallelo alla retta $x - 2y + 2 = 0$ e $\mathbf{w}$ parallelo alla retta $x + 3y - 5 = 0$.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 4t \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

con il piano π passante per i punti $P(1,1,0)$, $Q(-1,0,2)$, $R(2,-1,1)$.

1) $|C| = |A| \cdot |B| = (1-\alpha)(4-\alpha^2) \cdot 2 \cdot (\alpha^2 - 9^2)$

LA MATRICE C E' INVERTIBILE PER $\alpha \neq 1, \pm 2, \pm 3$

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 3 & 8 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - A_1]{A_2 - 2A_1,\ A_3 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 + A_2]{A_3 - A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - y + 2w + 3z = 2 \\ 5y - w - 5z = -6 \end{cases}$$

$y = \dfrac{w+5z-6}{5}$, $\quad x = 2+y-2w+3z$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{4-9w-10z}{5}$

D

SOL: $\quad x = \dfrac{4-9s-10t}{5}$, $\quad y = \dfrac{s+5t-6}{5}$, $\quad w=s$, $z=t$

CON $s, t \in \mathbb{R}$.

3)

LA RETTA $x-2y+2=0$ E' // AL VETTORE $2\vec{i}+\vec{j}$

" $\quad x+3y-5=0$ " " $\quad 3\vec{i}-\vec{j}$

DOVRA' QUINDI ESSERE $\quad \vec{v} = \alpha(2\vec{i}+\vec{j})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{w} = \beta(3\vec{i}-\vec{j})$

DETERMINIAMO α, β IMPONENDO

$$\vec{i}+\vec{j} = \alpha(2\vec{i}+\vec{j}) + \beta(3\vec{i}-\vec{j}) = (2\alpha+3\beta)\vec{i} + (\alpha-\beta)\vec{j}$$

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1+\beta \\ 2(1+\beta)+3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

4) IL PIANO π HA EQUAZIONE:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 3 - (y-1)(-4) + z\cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x+4y+5z-7=0$$

$$\begin{cases} 3x+4y+5z-7 \\ x = 1-t \\ y = 3-4t \\ z = 2t-3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3(1-t)+4(3-4t)+5(2t-3)-7=0$$

$$-9t-7=0 \qquad t = -\frac{7}{9}$$

$$x = 1+\frac{7}{9} = \frac{16}{9}, \quad y = 3+\frac{28}{9} = \frac{55}{9}, \quad z = -\frac{14}{9}-3 = \frac{-41}{9}$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 E

nome ________ cognome ________ matr. ________

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare l'inversa della matrice $C = A - 2B$.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - w + z = 1 \\ 3x + y + w + 2z = 2 \\ x + 5y + 3w = 0 \\ 3x + 8y + 5w + z = 1 \end{cases}$$

QUADRILATERO

3) Dato il ~~parallelogramma~~ $ABCD$ di vertici $A = (-2,-1)$, $B = (4,0)$, $C = (5,7)$, $D = (1,6)$, siano M ed N i punti che dividono la diagonale BD in tre parti uguali. Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \quad \frac{x-1}{2} = 2y + 1 = \frac{z+2}{3}$$

con il piano π passante per $P(1,1,0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

1) $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $|C| = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -4 & 10 & 1 \\ -8 & 21 & 2 \end{pmatrix}$

VERIFICA $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -4 & 10 & 1 \\ -8 & 21 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 14 & 8 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $car(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

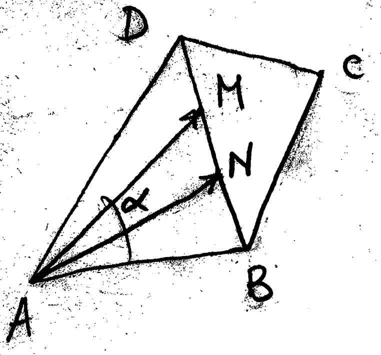
$$\begin{cases} x - 2y - w + z = 1 \\ 7y + 4w - z = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ y = \dfrac{z-4w-1}{7}\ ,\quad x = 2y + w - z + 1 = \dfrac{5-w-5z}{7}$ E

SOL: $\quad x = \dfrac{5-s-5t}{7},\ y = \dfrac{t-4s-1}{7}\ ,\ w = s,\ z = t$

CON $s, t \in \mathbb{R}$.

3)



$\vec{BD} = -3\vec{i} + 6\vec{j}\ ,\quad \vec{AB} = 6\vec{i} + \vec{j}$

$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BD} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AM}\cdot\vec{AN}}{\|\vec{AM}\|\,\|\vec{AN}\|} = \frac{4\cdot 5 + 5\cdot 3}{\sqrt{4^2+5^2}\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{35}{\sqrt{41}\sqrt{34}}$$

4) EQUAZIONE PIANO π:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(x-1) - (y-1)(-3) + z(-4)$$

$$\Rightarrow -2x + 3y - 4z - 1 = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 3y - 4z - 1 = 0 \\ x = 4y + 3 \\ z = 6y + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad -2(4y+3) + 3y - 4(6y+1) - 1 = 0$$

$$-29y - 11 = 0$$

$$y = -\frac{11}{29}$$

$$x = 4\left(-\frac{11}{29}\right) + 3 = \frac{43}{29}$$

$$z = 6\left(-\frac{11}{29}\right) + 1 = -\frac{37}{29}$$

INTERSEZIONE: $\left(\dfrac{43}{29}, -\dfrac{11}{29}, -\dfrac{37}{29}\right)$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 F

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare l'inversa della matrice $C = 2A + B$.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y - w + z = 3 \\ 3x + y + w + 2z = 1 \\ x + 5y + 3w = -5 \\ 3x + 8y + 5w + z = -7 \end{cases}$$

3) Dato il triangolo ABC di vertici $A = (4, -1, 2)$, $B = (2, 3, 0)$, $C = (1, 2, -4)$ calcolare l'altezza relativa al lato AB.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \quad \frac{x+4}{2} = 2y + 1 = \frac{z+2}{3}$$

con il piano π passante per $P(5, -3, 0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

1) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |C| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 9$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 5 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 14 & 8 & -2 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE :

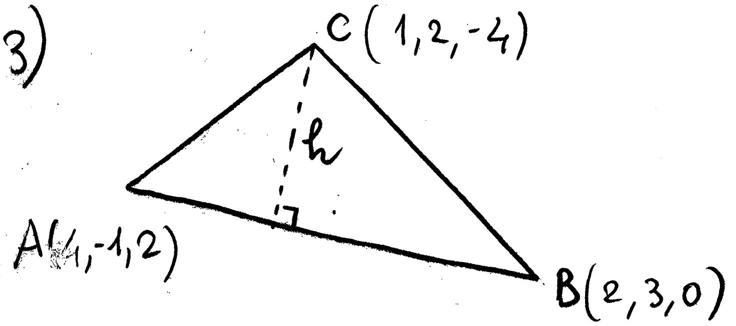
F

$$\begin{cases} x-2y-w+z=3 \\ 7y+4w-z=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{z-4w-8}{7} \\ x=2y+w-z+3=\dfrac{5-w-5z}{7} \end{cases}$$

SOL: $x=\dfrac{5-s-5t}{7}$, $w=s$

$y=\dfrac{t-4s-8}{7}$, $z=t$ con $s,t\in\mathbb{R}$

3)



$$h=\frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$\vec{AB}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

$\vec{AC}=-3\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&4&-2\\-3&3&-6\end{vmatrix}=-18\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}$$

$$h=\sqrt{18^2+6^2+6^2}\Big/\sqrt{2^2+4^2+2^2}=6\sqrt{11}\Big/2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{66}}{2}.$$

4) EQUAZIONE PIANO π:

$$0=\begin{vmatrix}x-5&y+3&z\\1&2&1\\2&0&-1\end{vmatrix}=-2(x-5)-(y+3)(-3)+z(-4)$$

$$\Rightarrow\quad -2x+3y-4z+19=0$$

$$\begin{cases}-2x+3y-4z+19=0\\x=4y-2\\z=6y+1\end{cases}\Rightarrow\quad -2(4y-2)+3y-4(6y+1)+19=0$$

$$-29y+19=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{19}{29}$$

$$x=4\,\frac{19}{29}-2=\frac{18}{29}$$

$$z=6\,\frac{19}{29}+1=\frac{143}{29}$$

INTERSEZIONE: $\left(\dfrac{18}{29},\dfrac{19}{29},\dfrac{143}{29}\right)$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/12/13 G

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - 3w + z = 1 \\ x + y - 3w + 2z = -2 \\ x + 5y - 3w - 2z = 10 \\ x - 3w + 3z = -5 \end{cases}$$

3) Dato il parallelogramma $ABCD$ di vertici $A = (0,0)$, $B = (4,1)$, $C = (5,8)$, $D = (1,7)$, siano M ed N i punti che dividono la diagonale BD in tre parti uguali. Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$.

4) Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto $A(0,3,0)$ e per la retta

$$r: \quad 3x + y - z = 5, \; x - y + z = 4.$$

1) $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|C| = -2\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -2(-8) - 2(-8) = 32$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -3 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - A_1}]{A_2 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 + 3A_2}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

CAR(A) = car$(A|B) = 2$. IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

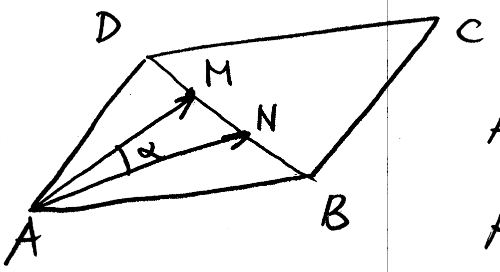
$$\begin{cases} x + 2y - 3w + z = 1 \\ -y + z = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = 3 + z \,, \quad x = 1 - 2y + 3w - z = -5 - 3z + 3w$$

SOL: $x = -5 + 3s - 3t$, $y = 3 + t$, $w = 1$, $z = t$

CON $s, t \in \mathbb{R}$.

3)



$$\vec{BD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} \,, \quad \vec{AB} = 4\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BD} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AM}\cdot\vec{AN}}{\|\vec{AM}\|\,\|\vec{AN}\|} = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 3}{\sqrt{2^2+5^2}\,\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{21}{\sqrt{29}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

4) SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI PIANI PASSANTI PER LA RETTA r:

$$\lambda(3x + y - z - 5) + \mu(x - y + z - 4) = 0.$$

IMPONENDO CHE IL PIANO PASSI PER $A(0,3,0)$ RICAVIAMO LA CONDIZIONE

$$\lambda(3 - 5) + \mu(-3 - 4) = 0$$

$$-2\lambda - 7\mu = 0.$$

$\Rightarrow$ POSTO (AD ESEMPIO) $\mu = -2$ RICAVIAMO $\lambda = 7$

IL PIANO CERCATO E' DATO DA:

$$7(3x + y - z - 5) - 2(x - y + z - 4) = 0$$

$$19x + 9y - 9z - 27 = 0$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 3/112/13 H

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1 \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro α la matrice $C = AB$ è invertibile.

2) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2w + 6z = -3 \\ x - 2y + w + z = -1 \\ x - 4y + w - 3z = 0 \\ 3x - 10y + 3w - 5z = -1 \end{cases}$$

3) Nel piano xy scomporre il vettore $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ nella somma di due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ con $\mathbf{v}$ parallelo alla retta $x - y + 2 = 0$ e $\mathbf{w}$ parallelo alla retta $2x + 3y - 1 = 0$.

4) Determinare il punto di intersezione della retta

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5t \\ z = -2t - 4 \end{cases}$$

con il piano π passante per $P(1,1,0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

1) $|C| = |A| \cdot |B| = 2\alpha(6-\alpha) \cdot 3(-1-2\alpha+\alpha^2)$

$|C| = 0$ per $\alpha = 0$, $\alpha = 6$, $1 \pm \sqrt{2}$

LA MATRICE C E' INVERTIBILE PER $\alpha \neq 0, 6, 1 \pm \sqrt{2}$

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -10 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 + 2A_2]{A_3 + A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CAR(A) = CAR(A|B) = 2

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - 2y + w + z = -1 \\ 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{-1-4z}{2}$, $x = -1+2y-w-z = -2-w-5z$

SOL: $x = -2-s-5t$, $y = \dfrac{-1-4t}{2}$, $w = s$, $z = t$

CON $s, t \in \mathbb{R}$.

3) LA RETTA $x-y+2=0$ E' // AL VETTORE $\vec{i}+\vec{j}$

// $2x+3y-1=0$ " " $3\vec{i}-2\vec{j}$

DOVRA' QUINDI ESSERE $\begin{cases} \vec{v} = \alpha(\vec{i}+\vec{j}) \\ \vec{w} = \beta(3\vec{i}-2\vec{j}) \end{cases}$

DERMINIAMO α, β IMPONENDO:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$-3\vec{i}+\vec{j} = \alpha(\vec{i}+\vec{j}) + \beta(3\vec{i}-2\vec{j}) = (\alpha+3\beta)\vec{i} + (\alpha-2\beta)\vec{j}$$

$$\begin{cases} \alpha+3\beta = -3 \\ \alpha-2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\beta = -4 \\ \alpha = 1+2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{4}{5} \\ \alpha = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

4) IL PIANO π HA EQUAZIONE

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 4 - (y-1)\cdot 1 + z(-3)$$

$$\Rightarrow 4x-y-3z-3=0$$

$$\begin{cases} 4x-y-3z-3=0 \\ x = 2-3t \\ y = 5t \\ z = -2t-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &4(2-3t)-5t-3(-2t-4)-3=0 \\ &8-12t-5t+6t+12-3=0 \\ &-11t+17=0 \Rightarrow t = \frac{17}{11} \end{aligned}$$

$x = 2-3\dfrac{17}{11} = -\dfrac{29}{11}$, $y = 5\cdot\dfrac{17}{11} = \dfrac{85}{11}$, $z = -2\left(\dfrac{17}{11}\right)-4 = -\dfrac{78}{11}$

INTERSEZIONE: $\left(-\dfrac{29}{11}, \dfrac{85}{11}, -\dfrac{78}{11}\right)$