

nome _____ cognome _____ matr. _____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + w + z = -2 \\ x - y + 3w + 2z = 4 \\ x + y - 5w - 3z = -10 \\ 3x + y - 7w - 4z = -16 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i vettori perpendicolari a $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ la cui proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ha norma 2.

4) Determinare i punti P del piano che hanno distanza $\sqrt{5}$ dalla retta $y = 2x - 3$ e distanza $\sqrt{2}$ dalla retta $y = -x + 1$.

1) $C = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad |C| = 66, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7/66 & -6/66 \\ -3/66 & 12/66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{66} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

2) SCAMBIAMO SUBITO 1^a e 2^a RIGA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & -3 & -10 \\ 3 & 1 & -7 & -4 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_2 - 3A_1 \\ A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 4 & -16 & -10 & -28 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} A_3 - A_2 \\ \rightarrow \\ A_4 - 2A_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

QUINDI $\text{cor}(A) = \text{cor}(A|B) = 2$
 $\Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x - y + 3w + 2z = 4 \\ 2y - 8w - 5z = -14 \end{cases} \quad \text{POSTO } w = s, z = t \text{ CON } s, t \in \mathbb{R}$$

RICAVIAMO:

$$y = \frac{1}{2}(8w + 5z - 14) = 4s + \frac{5}{2}t - 7$$

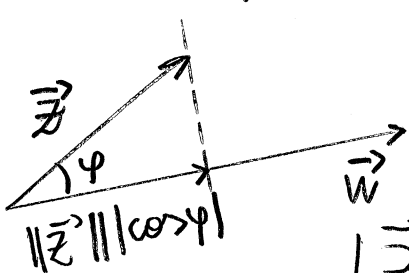
$$x = y - 3w - 2z + 4 = 4s + \frac{5}{2}t - 7 - 3s - 2t + 4 = s + \frac{t}{2} - 3$$

SOLUZIONE: $(s + \frac{t}{2} - 3, 4s + \frac{5}{2}t - 7, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$.

3) I VETTORI CERCATI SARANNO // A $\vec{u} \wedge \vec{v}$: 27/11/14
A

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \\ = -2(2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}).$$

CERCHIAMO QUINDI I VETTORI $\vec{z} = \lambda(2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k})$
CON $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE LA PROIEZIONE SU \vec{w} ABBAIA
NORMA 2:



$$\|\vec{z}\| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = 2$$

$$\frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \frac{|\lambda| |2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 1|}{\sqrt{6}} = 2$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \vec{z}_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7} (2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}).$$

4) I PUNTI $P(x,y)$ SARANNO SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} |2x - y - 3| = 5 \\ |x + y - 1| = 2 \end{cases}$$

ABBIAMO QUINDI 4 POSSIBILITA'

$$P_1 \begin{cases} 2x - y - 3 = 5 \\ x + y - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11/3 \\ y = -2/3 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} 2x - y - 3 = -5 \\ x + y - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 8/3 \end{cases}$$

$$P_3 \begin{cases} 2x - y - 3 = 5 \\ x + y - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7/3 \\ y = -10/3 \end{cases} \quad P_4 \begin{cases} 2x - y - 3 = -5 \\ x + y - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

I PUNTI SONO QUINDI:

$$P_1(11/3, -2/3), P_2(1/3, 8/3), P_3(7/3, -10/3), P_4(-1, 0).$$

nome _____ cognome _____ matr. _____
 Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + w + z = 0 \\ x - y + 3w + 2z = 3 \\ -2x + y + w - 2z = -1 \\ -y + 5w + z = 2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i vettori perpendicolari a $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ la cui proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ha norma 5.

4) Determinare i punti P del piano che hanno distanza $\sqrt{2}$ dalla retta $y = x - 7$ e distanza 2 dalla retta $y = \frac{4}{3}x - 1$.

1) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad |C| = 15, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 8/15 & 1/15 \\ 1/15 & 2/15 \end{pmatrix}.$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[A_3 + 2A_1]{A_2 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$\xrightarrow{A_4 - A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[A_2, A_3]{A_2 - A_4, \text{SCAMBIO}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\text{cer}(A) = \text{cer}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^4 - 3 = \infty^1$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x - y + w + z = 0 \\ -y + 3w = -1 \\ 2w + z = 3 \end{cases}$$

POSTO $z = t, \quad t \in \mathbb{R}$

$$w = \frac{3-t}{2}$$

$$y = 1 + 3w = 1 + \frac{9-3t}{2} = \frac{11-3t}{2}$$

$$x = y - w - z = \frac{11-3t}{2} - \frac{3-t}{2} - t = 4 - 2t.$$

SOL: $(4 - 2t, \frac{11-3t}{2}, \frac{3-t}{2}, t), \quad t \in \mathbb{R}.$

3) SIA \vec{z} IL VETTORE DA DETERMINARE.

27/11/14

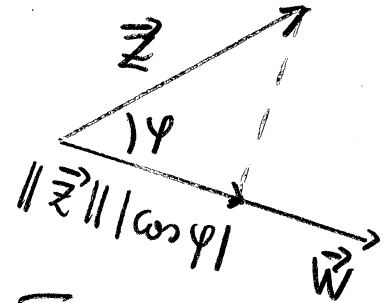
SARA' $\vec{z} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$ CON

B

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{j} + 5\vec{k} = 5(\vec{i} + \vec{j}).$$

CERCHIAMO ALLORA \vec{z} DELLA FORMA $\lambda(\vec{i} + \vec{j})$
CON λ TALE DA SODDISFARE LA SECONDA
CONDIZIONE

$$5 = \|\vec{z}\| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} =$$



$$= \frac{|\lambda| |1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{21}} \Rightarrow |\lambda| = 5\sqrt{21}.$$

$$\Rightarrow \vec{z}_{1,2} = \pm 5\sqrt{21} (\vec{i} + \vec{j}).$$

4) I PUNTI $P(x,y)$ RISOLVONO

$$\begin{cases} \frac{|x-y-7|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{|4x-3y-3|}{5} = 2 \end{cases}$$

ABBIAMO QUINDI 4 POSSIBILITA':

$$P_1 \begin{cases} x-y-7=2 \\ 4x-3y-3=10 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} x-y-7=-2 \\ 4x-3y-3=10 \end{cases}$$

$$P_3 \begin{cases} x-y-7=2 \\ 4x-3y-3=-10 \end{cases}$$

$$P_4 \begin{cases} x-y-7=-2 \\ 4x-3y-3=-10 \end{cases}$$

RISOLVENDO TROVIAMO I PUNTI:

$$P_1(-14, -23), P_2(-2, -7), P_3(-34, -43), P_4(-22, -27).$$

nome _____ cognome _____ matr. _____
 Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x - y + w + z = 3 \\ x - y + 2w + 3z = 1 \\ x + 3y - 7w - 2z = -1 \\ 7x - 3y + 5w + 7z = 5 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i vettori perpendicolari a $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ la cui proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ha norma 4.

4) Data nel piano la retta $r_1: x - 2y + 4 = 0$, determinare l'equazione della retta r_2 simmetrica di r_1 rispetto alla retta $r: x - y + 1 = 0$.

1) $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}, \quad |C| = 55, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7/55 & -1/55 \\ 6/55 & 7/55 \end{pmatrix}$

2) SCAMBIAMO SUBITO 1^a E 2^a RIGA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -7 & -2 & -1 \\ 7 & -3 & 5 & 7 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_2 - 5A_1 \\ A_3 - A_1 \\ A_4 - 7A_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -14 & -2 \\ 0 & 4 & -9 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -9 & -14 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_3 - A_2 \\ A_4 - A_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{QUINDI } \text{cer}(A) = \text{cer}(A|B) = 3$$

$\Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x - y + 2w + 3z = 1 \\ 4y - 9w - 14z = -2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

posto $w = t, \quad t \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{9w + 14z - 2}{4} = \frac{9t - 2}{4}$$

$$x = y - 2w - 3z + 1 = \frac{9t - 2}{4} - 2t + 1 = \frac{t + 2}{4}$$

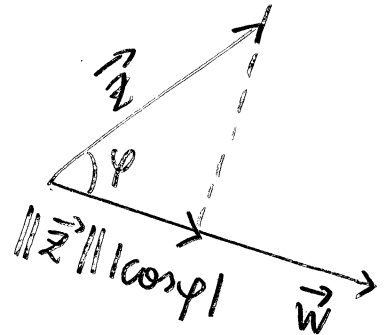
SOL: $\left(\frac{t+2}{4}, \frac{9t-2}{4}, t, 0 \right), \quad t \in \mathbb{R}$.

3) SIA \vec{z} IL VETTORE DA DETERMINARE. 27/11/14
C
AVREMO $\vec{z} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$ CON

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

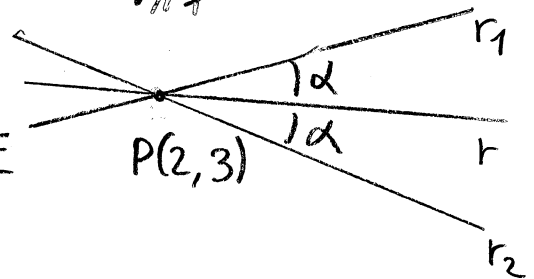
QUINDI $\vec{z} = \lambda (5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k})$ PER QUALCUN
 $\lambda \in \mathbb{R}$. IMPONENDO LA SECONDA
CONDIZIONE TROVIAMO

$$\begin{aligned} 4 &= \|\vec{z}\| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \\ &= \frac{|\lambda| |5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot 3|}{\sqrt{14}} = \frac{17|\lambda|}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$



SEGUE CHE $\lambda = \pm \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{17}}$, $\vec{z}_{1,2} = \pm \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{17}} (5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k})$

4) r_1 E r SI INTERSECANO IN
 $P(2,3)$. QUINDI r_2 AVRA' EQUAZIONE



$$a(x-2) + b(y-3) = 0.$$

DETERMINIAMO a, b IMPONENDO CHE r_1 E r_2
FORMINO LO STESSO ANGOLO CON r :

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1+2|}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \quad \text{ELEVANDO AL QUADRATO
E SEMPLIFICANDO,}$$

$$\text{TROVIAMO:} \quad 5(a-b)^2 = 3(a^2+b^2)$$

$$2a^2 + 5ab + 2b^2 = 0.$$

$$\text{POSTO } a=1, \text{ SI HA: } b = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

PER $b = -2$ RITROVIAMO r_1 . PER

$$b = -\frac{1}{2} \text{ TROVIAMO } r_2: 2x - y - 1 = 0.$$

nome _____ cognome _____ matr. _____
 Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{25}{9} - 6t$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

$$y = -\frac{46}{9} - 6t$$

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3w + 6z = 0 \\ 3x - y - 4w + 4z = 3 \\ 5x - 4y + w + 8z = 5 \\ 2x - y + w + 8z = -2 \end{cases}$$

$$w = -\frac{14}{9} - 2t$$

$$z = t$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i vettori perpendicolari a $u = i - 3j + 4k$, $v = -i - j + 2k$ la cui proiezione ortogonale sul vettore $w = i + j - k$ ha norma 4.

4) Data nel piano la retta $r_1: x + y - 3 = 0$, determinare l'equazione della retta r_2 simmetrica di r_1 rispetto alla retta $r: x + 3y - 5 = 0$.

$$1) C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad |C| = 12, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{12} & -\frac{6}{12} \\ \frac{2}{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2A_2 - 3A_1 \\ 2A_3 - 5A_1 \\ A_4 - A_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -17 & -10 & 6 \\ 0 & 2 & -13 & -14 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_2 - 4A_4 \\ \rightarrow \\ A_3 - 2A_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -18 & 14 \\ 0 & 0 & -9 & -18 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} A_2 - A_3 \\ \rightarrow \\ \text{Poi SCAMBIO} \\ A_4 \text{ e } A_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{cor}(A) = \text{cor}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1 \text{ SOLUZIONI.}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3w + 6z = 0 \\ y - 2w + 2z = -2 \\ 9w + 18z = -14 \end{cases} \quad \text{POSTO } z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$w = -\frac{14}{9} - 2t$$

$$y = 2w + 2z - 2 = -\frac{28}{9} - 4t - 2t - 2 = -\frac{46}{9} - 6t$$

$$x = \frac{1}{2}(2y - 3w - 6z) = \frac{1}{2}\left(-\frac{92}{9} - 12t + \frac{42}{9} + 6t - 6t\right) = -\frac{25}{9} - 6t.$$

3) SIA \vec{z} IL VETTORE DA DETERMINARE, SARA' $27/11/14$

$$\vec{z} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$= -2(\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

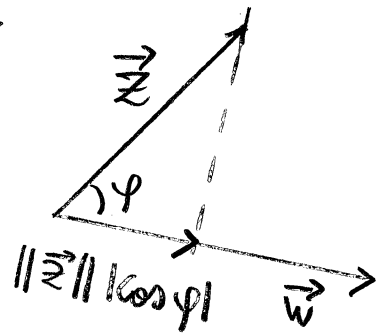
CERCHIAMO ALLORA \vec{z} DELLA FORMA

$$\vec{z} = \lambda(\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ CON } \lambda \text{ TALE CHE}$$

$$4 = \|\vec{z}\| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} =$$

$$= \frac{|\lambda| |1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |\lambda| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \vec{z}_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} (\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}).$$

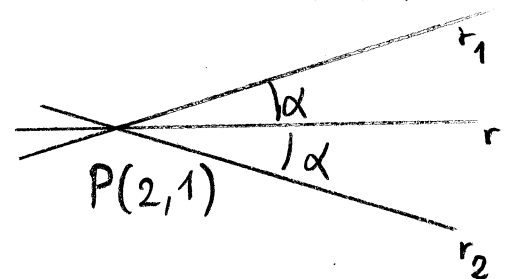


4) LE RETTE r, r_1 SI INTERSECANO IN $P(2,1)$.

LA RETTA r_2 SIMMETRICA DI r_1 AVR'A QUINDI EQUAZIONE $a(x-2) + b(y-1) = 0$. DETER.

a, b IMPONENDO CHE L'ANGOLO FRA r_2 E r SIA LO STESSO CHE FRA r_1 E r :

$$\frac{|a+3b|}{\sqrt{10} \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1+3|}{\sqrt{2} \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$



ELEVANDO AL QUADRATO E SEMPLIFICANDO:

$$(a+3b)^2 = 8(a^2+b^2) \Rightarrow 7a^2 - 6ab - b^2 = 0$$

POSTO $b=1$ RICAVIAMO $a = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{14} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{7} \end{cases}$

PER $a=1$ RITROVIAMO LA RETTA r_1

PER $a = -\frac{1}{7}$ TROVIAMO $r_2: x - 7y + 5 = 0$.