nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + w + z = 3 \\ x - y + 3w + 2z = -1 \\ x + y - 5w - 3z = 5 \\ 3x + y - 7w - 4z = 9 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i vettori perpendicolari a $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ la cui proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ha norma 3.

4) Determinare i punti P del piano che hanno distanza $\sqrt{10}$ dalla retta $y = -3x + 2$ e distanza $\sqrt{2}$ dalla retta $y = x + 4$.

1) $C = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C| = -2$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -5 \\ -\frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$

2) SCAMBIAMO SUBITO 1ª e 2ª RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -16 & -10 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 2$

$\Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x - y + 3w + 2z = -1 \\ 2y - 8w - 5z = 6 \end{cases}$$

$w = s$, $z = t$

$y = 3 + 4s + \frac{5}{2}t$

$x = y - 3w - 2z - 1 = 2 + s + \frac{1}{2}t$

SOLUZIONE:

$x = 2 + s + \frac{1}{2}t$, $y = 3 + 4s + \frac{5}{2}t$, $w = s$, $z = t$; $s, t \in \mathbb{R}$.

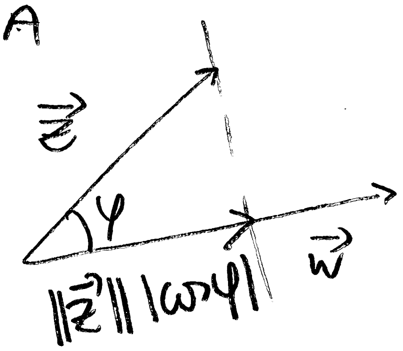
A 26/11/14

3) $\vec{z} \perp \vec{u}, \vec{v} \iff \vec{z} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = 2(-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$$

CERCHIAMO QUINDI $\vec{z}$ DELLA FORMA

$$\vec{z} = \lambda(-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$$



DETERMINIAMO λ IMPONENDO LA SECONDA CONDIZIONE

$$\|\vec{z}\| |\cos\varphi| = 3 \iff \frac{|\vec{z} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = 3$$

$$\iff \frac{|\lambda| \, |(-2)(-2) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \iff |\lambda| = 1.$$

I VETTORI SONO $\vec{z}_{1,2} = \pm(-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$

4) I PUNTI $P(x,y)$ DOVRANNO VERIFICARE

$$\frac{|3x+y-2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, \quad \frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

CIOE' $|3x+y-2| = 10$ E $|x-y+4| = 2$.

TROVIAMO QUINDI I PUNTI:

$P_1: \begin{cases} 3x+y = 12 \\ x-y = -2 \end{cases}$ $\quad x = 10/4 \quad y = 18/4$

$P_3: \begin{cases} 3x+y = 12 \\ x-y = -6 \end{cases}$ $\quad x = 6/4 \quad y = 30/4$

$P_2: \begin{cases} 3x+y = -8 \\ x-y = -2 \end{cases}$ $\quad x = -10/4 \quad y = -2/4$

$P_4: \begin{cases} 3x+y = -8 \\ x-y = -6 \end{cases}$ $\quad x = -14/4 \quad y = 10/4$

SOL: $P_1\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $P_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 26/11/14 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + w + 6z = 0 \\ x - y + 3w + 5z = -1 \\ -3x + y + w - 7z = -1 \\ -y + 5w + 4z = -2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i versori perpendicolari ai vettori $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e calcolare la norma della loro proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4) Determinare le equazioni delle rette d_1, d_2 formate dai punti P del piano la cui distanza dalla retta $r_1: x + 2y + 1 = 0$ è la metà della distanza dalla retta $r_2: 4x - 2y - 7 = 0$.

1) $C = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $|C| = 76$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{76} & \frac{1}{76} \\ \frac{1}{76} & \frac{11}{76} \end{pmatrix}$

2) SCAMBIAMO SUBITO 1ª e 2ª RIGA E POI RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+3A_1]{A_2-2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4+A_2]{A_3+2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|B) = 2$

$\Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

$w = s$, $z = t$

$$\begin{cases} x - y + 3w + 5z = -1 \\ y - 5w - 4z = 2 \end{cases}$$

$y = 2 + 5s + 4t$

$x = y - 3w - 5z - 1 = 1 + 2s - t$

SOL: $x = 1 + 2s - t$, $y = 2 + 5s + 4t$, $w = s$, $z = t$; $s, t \in \mathbb{R}$.

B 26/11/14

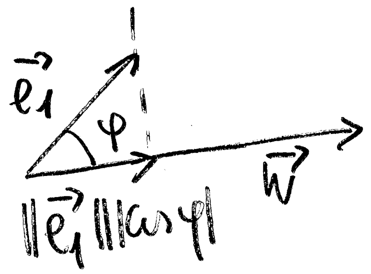
3) I VERSORI $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ SONO $\parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 10\vec{k} = 2(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k})$$

DA CUI

$$\vec{e}_1 = \frac{-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}}{\sqrt{30}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}}{\sqrt{30}}.$$

LA PROIEZIONE DI $\vec{e}_1$ SU $\vec{w}$ HA NORMA PARI A $\|\vec{e}_1\| \, |\cos\varphi|$. QUINDI ABBIAMO



$$\|\vec{e}_1\| \, |\cos\varphi| = \frac{|\vec{e}_1 \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \frac{|(-1)(-1) + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{30}\,\sqrt{6}} = \frac{10}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

LA NORMA DELLA PROIEZIONE DI $\vec{e}_2$ E' LA STESSA.

4) I PUNTI $P(x,y)$ DOVRANNO VERIFICARE LA CONDIZIONE

$$\frac{|x + 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \, \frac{|4x - 2y - 7|}{\sqrt{20}}$$

CIOE'

$$4|x + 2y + 1| = |4x - 2y - 7|.$$

ABBIAMO QUINDI LE RETTE

$$r_1 : \cancel{4x} + 8y + 4 = \cancel{4x} - 2y - 7 \iff 10y = -11 \iff y = -\frac{11}{10}$$

$$r_2 : 4x + 8y + 4 = -4x + 2y + 7 \iff 8x + 6y - 3 = 0 .$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 26/11/14 C

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + w + 6z = -3 \\ 3x - y + w + 4z = -2 \\ x - 4y + w + 8z = 0 \\ 4x - y + 2w + 8z = -8 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i versori perpendicolari ai vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e calcolare la norma della loro proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

4) Data nel piano la retta $r_1 : x - 2y + 4 = 0$, determinare l'equazione della retta r_2 simmetrica di r_1 rispetto al punto $P(1, -1)$.

1) $C = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $|C| = -64$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 8 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-4A_1]{A_2-3A_1,\ A_2-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -14 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -16 & 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[A_4+3A_2]{A_2+2A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -10 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -10 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+2A_2]{A_4-2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -10 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -18 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|B) = 3$

$\infty^{4-3} = \infty^1$ SOL.

$$\begin{cases} x - 2y + w + 6z = -3 \\ y - 2w - 10z = 13 \\ -4w - 18z = 29 \end{cases}$$

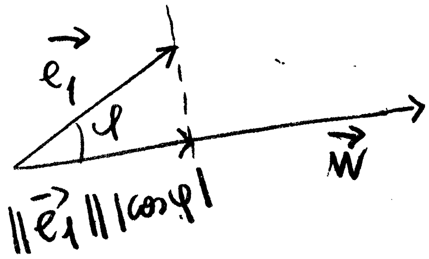
$z = t$, $w = -\frac{9}{2}t - \frac{29}{4}$, $y = 2w + 10z + 13 = -\frac{3}{2} + t$,

$x = 2y - w - 6z - 3 = -3 + 2t + \frac{9}{2}t + \frac{29}{4} - 6t - 3 = \frac{5}{4} + \frac{t}{2}$; $t \in \mathbb{R}$

3) I VERSORI $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ SONO // $\vec{u} \wedge \vec{v}$ C 26/11/14

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 4\vec{k} \stackrel{!}{=} -2\left(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)$$

QUINDI $\vec{e}_{1/2} = \pm \dfrac{\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}}$.



$$\|\vec{e}_1\| \cdot |\cos\varphi| = \frac{|\vec{e}_1 \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{3}} \left| 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \right| = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

LA NORMA DELLA PROIEZIONE DI $\vec{e}_2$ SU $\vec{w}$ E' LA STESSA.

4) LA RETTA r_2 E' PARALLELA ALLA RETTA r_1.
QUINDI r_1 HA EQUAZIONE $x - 2y + c = 0$,
CON c DA DETERMINARSI IMPONENDO CHE SIA:

$$\text{dist}(P, r_1) = \text{dist}(P, r_2), \quad P = (1, -1).$$

TROVIAMO QUINDI LA RELAZIONE:

$$\frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-2)(-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

CIOE' $|c + 3| = 7$.

RISOLVENDO RICAVIAMO $c = \begin{cases} 4 \\ -11 \end{cases}$

PER $c = 4$ RITROVIAMO LA RETTA r_1, QUINDI r_2 E' DATA DA $x - 2y - 11 = 0$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 26/11/14 D

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

determinare l'inversa della matrice $C = AB$.

2) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + w + 6z = -3 \\ 3x - y + w + 4z = -2 \\ x + 3y - w - 8z = 4 \\ 5x + w + 2z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare i versori perpendicolari ai vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e calcolare la norma della loro proiezione ortogonale sul vettore $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

4) Data nel piano la retta $r_1 : x + y - 2 = 0$, determinare l'equazione della retta r_2 simmetrica di r_1 rispetto alla retta $r: 2x - y - 1 = 0$.

1) $C = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $|C| = 120$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$.

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -8 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 5A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -14 & 7 \\ 0 & 5 & -2 & -14 & 7 \\ 0 & 10 & -4 & -28 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

$\infty^{4-2} = \infty^2$ SOL.

$$\begin{cases} x - 2y + w + 6z = -3 \\ 5y - 2w - 14z = 7 \end{cases}$$

$w = s$, $z = t$, $y = \dfrac{2s + 14t + 7}{5}$

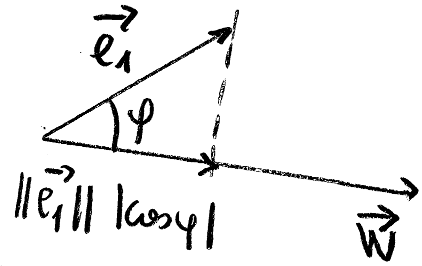
$x = 2y - w - 6z - 3 = \dfrac{4s + 28t + 14}{5} - s - 6t - 3 = \dfrac{-s - 2t - 1}{5}$;

$s, t \in \mathbb{R}$.

3) I VERSORI $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ SONO // $\vec{u} \wedge \vec{v}$ D 26/11/14

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} = 3(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

QUINDI $\vec{e}_{1,2} = \pm \dfrac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}$



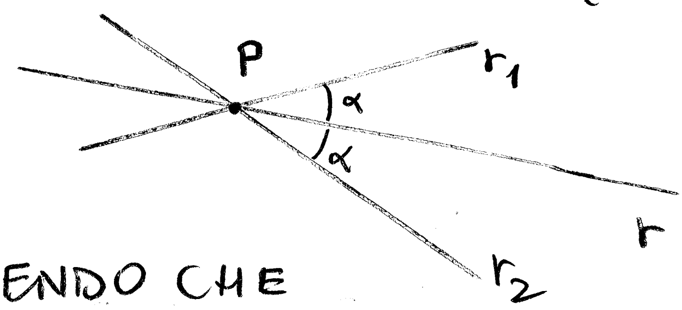
$$\|\vec{e}_1\|\,|\cos\varphi| = \frac{|\vec{e}_1 \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\,|2(-1) + 1 \cdot 2 + (-1)(-1)| = \frac{1}{6}.$$

LA NORMA DELLA PROIEZIONE DI $\vec{e}_2$ E' LA STESSA.

4) r_1 e r SI INTERSECANO NEL PUNTO $P(1,1)$.

QUINDI r_2 AVRA' EQ.

$$a(x-1) + b(y-1) = 0.$$



DETERMINIAMO a, b IMPONENDO CHE

r_1 e r_2 FORMINO LO STESSO ANGOLO CON $r_1: 2x - y - 1 = 0$.

$$\frac{|2 \cdot a - 1 \cdot b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \iff \frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ELEVANDO AL QUADRATO E SEMPLIFICANDO SI OTTIENE

$7a^2 - 8ab + b^2 = 0$. POSTO $b = 1$, SI RICAVA:

$a = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{7} \end{cases}$ PER $a = 1$ SI RIOTTIENE LA RETTA r_1.
PER $a = \frac{1}{7}$ SI RICAVA r_2:

$$r_2 : x + 7y - 8 = 0.$$