Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 22/01/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

A

1) Determinare i piani π_1, π_2 passanti per la retta $r\colon x-1=y=z+1$ e aventi distanza $\delta=1$ dal punto $P(2,0,1)$.

2) Trovare il dominio e calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x)=\sqrt{-1-2\log_2(\sin x)}$.

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y=\sqrt[3]{10-2x}$ nel punto di ascissa $x=1$.

4) Determinare massimi, minimi assoluti e relativi della funzione $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+e^{-3x}}$.

1) FASCIO DI PIANI PER r:

$$\lambda(x-y-1)+\mu(y-z-1)=0$$

$$\lambda x+(\mu-\lambda)y-\mu z-\lambda-\mu=0$$

$$\delta=1 \iff \frac{|2\lambda-\mu-\lambda-\mu|}{\sqrt{\lambda^2+(\mu-\lambda)^2+\mu^2}}=1 \iff (\lambda-2\mu)^2=\lambda^2+(\mu-\lambda)^2+\mu^2$$

$$\lambda^2-4\lambda\mu+4\mu^2=2\lambda^2+2\mu^2-2\lambda\mu$$

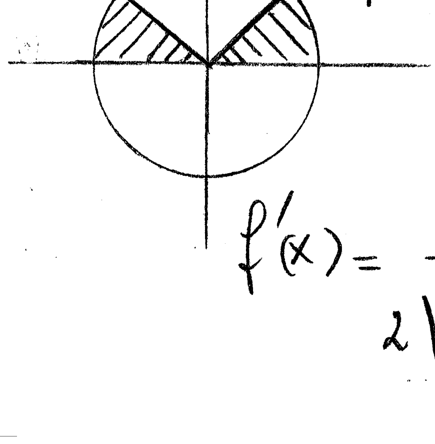
$$\lambda^2+2\lambda\mu-2\mu^2=0$$

POSTO $\mu=1$, $\quad \lambda^2+2\lambda-2=0 \implies \lambda=-1\pm\sqrt{3}$.

π_1 : $(-1+\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})y-z-\sqrt{3}=0$

π_2 : $(-1-\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})y-z+\sqrt{3}=0$.

2) DOMINIO DI $f(x)$: $\begin{cases}\sin x>0\\ -1-2\log_2\sin x\geq 0\end{cases} \iff \begin{cases}\sin x>0\\ \sin x\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$



SOL:

$2k\pi<x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4} \;\cup\; 2k\pi+\frac{3}{4}\pi\leq x<(2k+1)\pi$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1-2\log_2(\sin x)}}(-2)\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\ln 2}.$$

A

3) $y = \sqrt[3]{10-2x}$, $y(1) = \sqrt[3]{8} = 2$

$y' = \frac{1}{3}(10-2x)^{-2/3}(-2)$

$y'(1) = \frac{1}{3}\, 8^{-2/3}(-2) = -\frac{1}{6}$

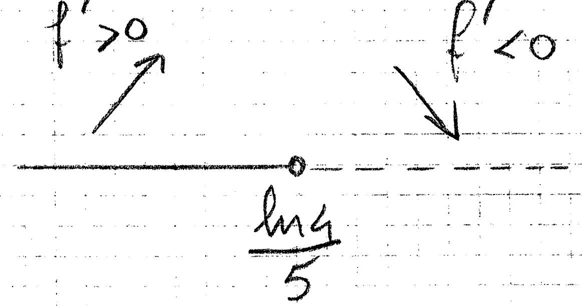
RETTA TANGENTE : $y = 2 - \frac{1}{6}(x-1) = -\frac{x}{6} + \frac{13}{6}$.

1) $f'(x) = \left(\frac{1}{e^{x}+e^{-4x}}\right)' = -\frac{e^{x}-4e^{-4x}}{(e^{x}+e^{-4x})^2}$

$= \frac{e^{x}(4e^{-5x}-1)}{(e^{x}+e^{-4x})^2}$.

$f'(x) > 0 \iff 4e^{-5x}-1>0 \iff e^{-5x} > \frac{1}{4}$

$\iff -5x > -\ln 4 \iff x < \frac{\ln 4}{5}$



MASSIMO ASSOLUTO PER

$x = \frac{\ln 4}{5}$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 22/02/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare i piani π_1, π_2 passanti per la retta r: $\frac{x}{2} = y - 1 = z - 1$ e aventi distanza $\delta = 1$ dal punto $P(1, 0, 1)$.

2) Trovare il dominio e calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x) = \arcsin(\sqrt{4 - x^2})$.

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \log_3(5 - 2x)$ nel punto di ascissa $x = -2$.

4) Determinare massimi, minimi assoluti e relativi della funzione $f(x) = \frac{1}{2\cos x - \cos 2x}$ nell'inervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

B

1) FASCIO DI RETTE PER r:

$$\lambda(x - 2y + 2) + \mu(y - z) = 0$$

$$\lambda x + (\mu - 2\lambda) y - \mu z + 2\lambda = 0$$

$$\delta = 1 \iff \frac{|\lambda - \mu + 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (\mu - 2\lambda)^2 + \mu^2}} = 1 \iff (3\lambda - \mu)^2 = \lambda^2 + (\mu - 2\lambda)^2 + \mu^2$$

$$9\lambda^2 - 6\lambda\mu + \mu^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 4\lambda\mu + 4\lambda^2 + \mu^2$$

$$\mu^2 + 2\lambda\mu - 4\lambda^2 = 0$$

POSTO $\lambda = 1 \Rightarrow \mu^2 + 2\mu - 4 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \pm \sqrt{5}$

π_1: $x + (-3 + \sqrt{5}) y + (1 - \sqrt{5}) z - 2 = 0$

π_2: $x + (-3 - \sqrt{5}) y + (1 + \sqrt{5}) z - 2 = 0.$

DOMINIO DI $f(x)$: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 \geq 3 \end{cases}$

SOL: $-2 \leq x \leq -\sqrt{3} \cup \sqrt{3} \leq x \leq 2.$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (4 - x^2)}} \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 3}\sqrt{4 - x^2}}.$$

B

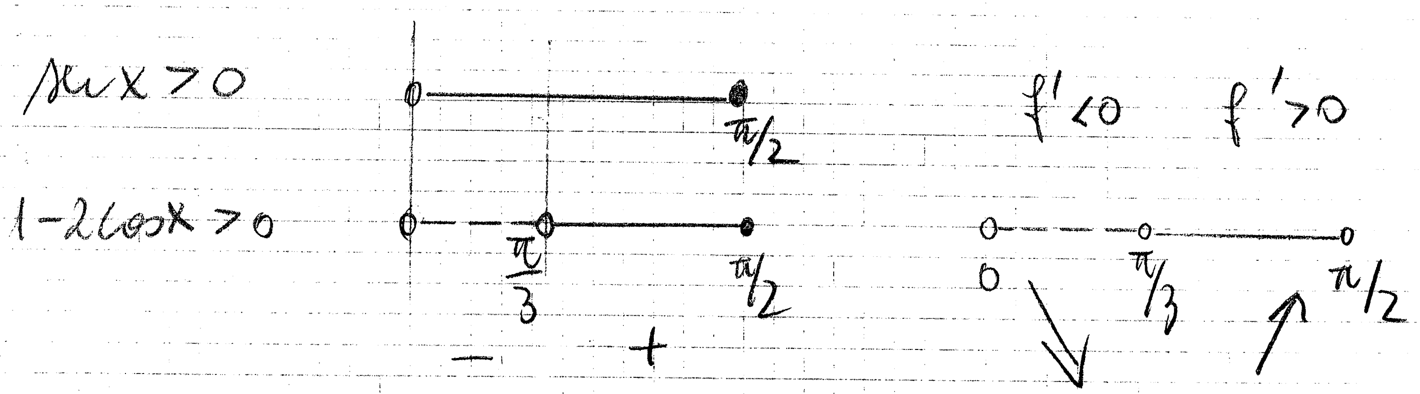
3) $y(-2) = \log_3 (5 - 2(-2)) = \log_3 9 = 2$

$$y'(x) = \frac{1}{5-2x}(-2)\frac{1}{\ln 3} \Rightarrow y'(-2) = \frac{-2}{9 \ln 3}$$

RETTA TANGENTE: $y = 2 - \frac{2}{9 \ln 3}(x+2)$

4) POICHÈ $2\cos x - \cos 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1$,
$2\cos x - \cos 2x \geq 1$ IN $[0, \pi/2]$.

$$f'(x) = \frac{2\sin x - 2\sin 2x}{(2\cos x - \cos 2x)^2} = \frac{2\sin x(1 - 2\cos x)}{(2\cos x - \cos 2x)^2}$$



MINIMO ASSOLUTO PER $x = \frac{\pi}{3}$.

$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow$

MASSIMO ASSOLUTO PER $x = 0, \frac{\pi}{2}$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 22/01/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

C

1) Determinare i piani π_1, π_2 passanti per la retta $r\colon x-1=\frac{y}{2}=z+1$ e aventi distanza $\delta=1$ dal punto $P(1,1,1)$.

2) Trovare il dominio e calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$.

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y=\arctan(\log_4 x)$ nel punto di ascissa $x=\frac{1}{4}$.

4) Determinare massimi, minimi assoluti e relativi della funzione $f(x)=(2-\tan x)\tan x$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

1) FASCIO DI PIANI PER r:

$$\lambda(2x-y-2)+\mu(x-z-2)=0$$

$$(2\lambda+\mu)x-\lambda y-\mu z-2\lambda-2\mu=0$$

$$\delta=1 \iff \frac{|\mu+2\lambda-\lambda-\mu-2\lambda-2\mu|}{\sqrt{(\mu+2\lambda)^2+\lambda^2+\mu^2}}=1$$

$$(\lambda+2\mu)^2=(\mu+2\lambda)^2+\lambda^2+\mu^2$$

$$\lambda^2+4\lambda\mu+4\mu^2=\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2+\lambda^2+\mu^2$$

$$4\lambda^2-2\mu^2=0$$

POSTO $\lambda=1$, TROVIAMO $4-2\mu^2=0 \Rightarrow \mu=\pm\sqrt{2}$

$\pi_1: (2+\sqrt{2})x-y-\sqrt{2}z-2-2\sqrt{2}=0$

$\pi_2: (2-\sqrt{2})x-y+\sqrt{2}z-2+2\sqrt{2}=0$

2) DOMINIO DI $f(x)$: $\begin{cases} x^2\geq 1 \\ \frac{2+x}{3-x}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x|\geq 1 \\ -2<x<3 \end{cases}$

SOL: $-2<x\leq -1 \cup 1\leq x<3$.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\left(\frac{2+x}{3-x}\right)}\frac{3-x+2+x}{(3-x)^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ \frac{5}{(2+x)(3-x)}$$

C

3) $y\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{arctang}\left(\log_4 \frac{1}{4}\right) = \operatorname{arctang}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$y'(x) = \frac{1}{1+(\log_4 x)^2} \, \frac{1}{\ln 4} \, \frac{1}{x}$$

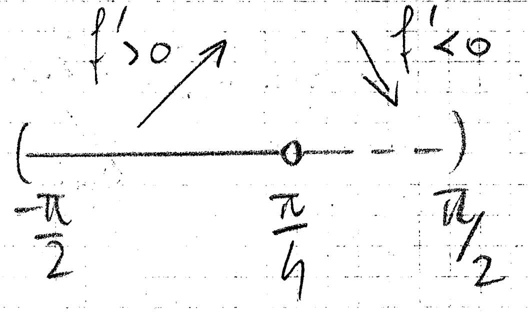
$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+1} \, \frac{1}{\ln 4} \, \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 2}$$

RETTA TANG. $y = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\ln 2}\left(x - \frac{1}{4}\right).$

4) $f'(x) = (2 - \operatorname{tang} x)\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tang} x \frac{1}{\cos^2 x}$

$\overset{!}{=} (2 - 2\operatorname{tang} x)\frac{1}{\cos^2 x}$

Quindi $f'(x) > 0 \iff \operatorname{tang} x < 1$



MASSIMO ASSOLUTO PER $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 22/01/15

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare i piani π_1, π_2 passanti per la retta r: $\dfrac{x-1}{-1} = y+1 = \dfrac{z}{2}$ e aventi distanza $\delta = 1$ dal punto $P(0,1,5)$. D

2) Trovare il dominio e calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-2^x}{4-2^x}}$.

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \arcsin(\log_2 x)$ nel punto di ascissa $x = \sqrt{2}$.

4) Determinare massimi, minimi assoluti e relativi della funzione $f(x) = x\sqrt[3]{4-2x}$ nell'inervallo $[0;2]$.

1) FASCIO DI RETTE PER r:

$$\lambda(x+y) + \mu(2y - z + 2) = 0$$

$$\lambda x + (\lambda + 2\mu)y - \mu z + 2\mu = 0$$

$$\delta = 1 \iff \frac{|\lambda + 2\mu - 5\mu + 2\mu|}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda+2\mu)^2 + \mu^2}} = 1 \iff (\lambda-\mu)^2 = \lambda^2 + (\lambda+2\mu)^2 + \mu^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 = \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2 + \mu^2$$

$$\lambda^2 + 6\lambda\mu + 4\mu^2 = 0$$

POSTO $\mu = 1$, $\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{5}$

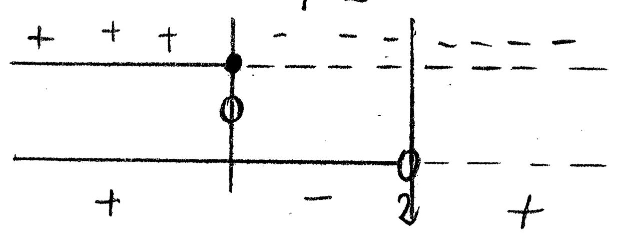
π_1 : $(-3+\sqrt{5})x + (-1+\sqrt{5})y - z - 2 = 0$,

π_2 : $(-3-\sqrt{5})x + (-1-\sqrt{5})y - z - 2 = 0$.

2) DOMINIO DI $f(x)$: $\dfrac{1-2^x}{4-2^x} \geq 0$ SOL: $x \leq 0 \cup x > 2$

$1-2^x \geq 0$

$4-2^x > 0$



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-2^x}{4-2^x}}} \cdot \frac{-2^x(4-2^x) + (1-2^x)2^x}{(4-2^x)^2} \cdot \ln 2 = \frac{-3\ln 2 \cdot 2^{x-1}}{\sqrt{\frac{1-2^x}{4-2^x}}\,(4-2^x)^2}$$

D

3) $y(\sqrt{2}) = \arcsin(\log_2 \sqrt{2}) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\log_2 x)^2}} \cdot \frac{1}{x \ln 2}$$

$$y'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\ln 2}$$

RETTA TANGENTE:

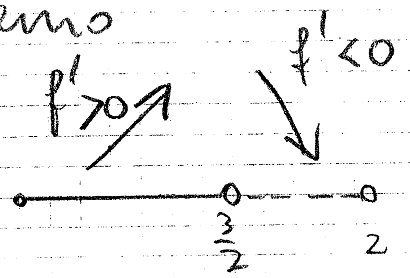
$$y = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\ln 2}(x-\sqrt{2})$$

4) $$f'(x) = \sqrt[3]{4-2x} - \frac{2}{3}\frac{x}{(4-2x)^{2/3}}$$

$$= \frac{4-\frac{8}{3}x}{\sqrt{4-2x}} \quad \text{per } x \neq 2$$

NELL'INTERVALLO $[0,2)$ avremo

$f'(x) > 0 \iff x < \frac{3}{2}$



QUINDI $x = \frac{3}{2}$ E' MASSIMO ASSOLUTO

POICHE' $f(0) = f(2) = 0$, $x=0$ E $x=2$ SONO

PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 22/01/15

nome ____________ cognome ____________ matr. ____________

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare i piani π_1, π_2 passanti per la retta $r: x-1 = 2y = 2z+1$ e aventi distanza $\delta = 1$ dal punto $P(2,0,1)$.

2) Trovare il dominio e calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x) = \sqrt[4]{1-2\log_3(\tan x)}$.

E

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ nel punto di ascissa $x=1$.

4) Determinare massimi, minimi assoluti e relativi della funzione $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$.

1) FASCIO DI PIANI PER r:

$$\lambda(x-2y-1) + \mu(x-2z-2) = 0$$

$$(\lambda+\mu)x - 2\lambda y - 2\mu z - \lambda - 2\mu = 0$$

$$\delta = 1 \iff \frac{|2(\lambda+\mu) - 2\mu - \lambda - 2\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2}} = 1$$

$$(\lambda - 2\mu)^2 = (\lambda+\mu)^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2$$

$$\lambda^2 - 4\lambda\mu + 4\mu^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2$$

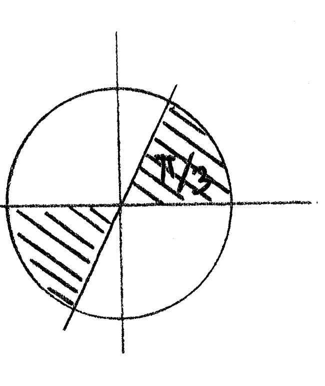
$$\mu^2 + 6\lambda\mu + 4\lambda^2 = 0$$

POSTO $\lambda = 1$, $\mu^2 + 6\lambda\mu + 4 = 0 \Rightarrow \mu = -3 \pm \sqrt{5}$

$\pi_1: (-2+\sqrt{5})x - 2y - 2(-3+\sqrt{5})z + 5 - 2\sqrt{5} = 0$,

$\pi_2: (-2-\sqrt{5})x - 2y - 2(-3-\sqrt{5})z + 5 + 2\sqrt{5} = 0$.

2) DOMINIO DI $f(x)$: $\begin{cases} \tan x > 0 \\ 1 - 2\log_3(\tan x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \tan x > 0 \\ \tan x \leq \sqrt{3} \end{cases}$



SOL: $k\pi < x \leq k\pi + \dfrac{\pi}{3}$.

E

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(1-2\log_3(\mathrm{tang}\,x)\right)^{-3/4}(-2)\,\frac{\cos x}{\sin x}\,\frac{1}{\ln 3}\,\frac{1}{\cos^2 x}$$

3) $y(1) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8-1}} = \dfrac{1}{2}$

$$y'(x) = -\frac{1}{3}\,(9-x^2)^{-\frac{4}{3}}\,(-2x)$$

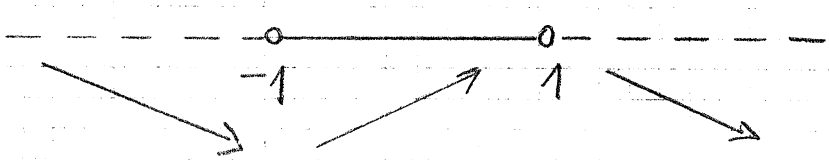
$$y'(1) = -\frac{1}{3}\;8^{-4/3}\,(-2) = \frac{1}{24}$$

RETTA TANGENTE: $y = \dfrac{x}{24} + \dfrac{11}{24}$.

4) POICHÈ $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, $f(x)$ E' DEFINITA PER OGNI X. CALCOLIAMO $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$ QUINDI $f'(x)>0 \iff 1-x^2>0$,

$f'<0$ $\quad f'>0$ $\quad f'<0$



$\Rightarrow$ $x=-1$ MIN. RELATIVO; $x=1$ MAX. RELATIVO.

POICHE' $f(x) = \mathrm{tang}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ E' DISPARI

E $f(x) > 0$ PER $x>0$, SI HA INOLTRE

$x=-1$ MIN. ASSOLUTO

$x=1$ MAX ASSOLUTO