A

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

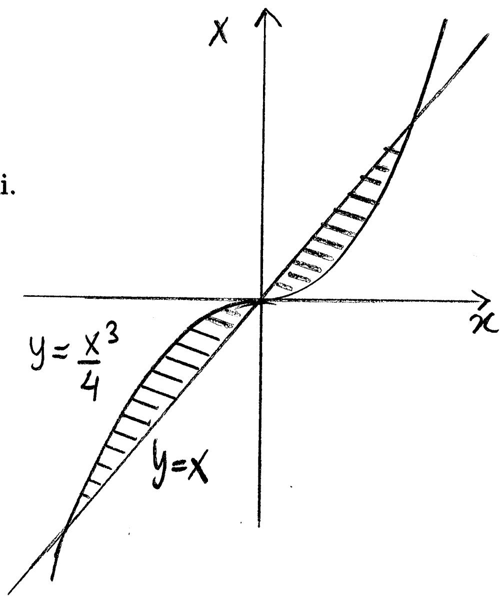
$$\begin{cases} 3x - y + w + 4z = -3 \\ -2x + 2y + w - 2z = 1 \\ x + y + 2w + 2z = -2 \\ -9x + 7y + 2w - 10z = 6 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r parallela al vettore $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, incidente l'asse y e la retta t: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z + 1$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 4}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **21/1/16** A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

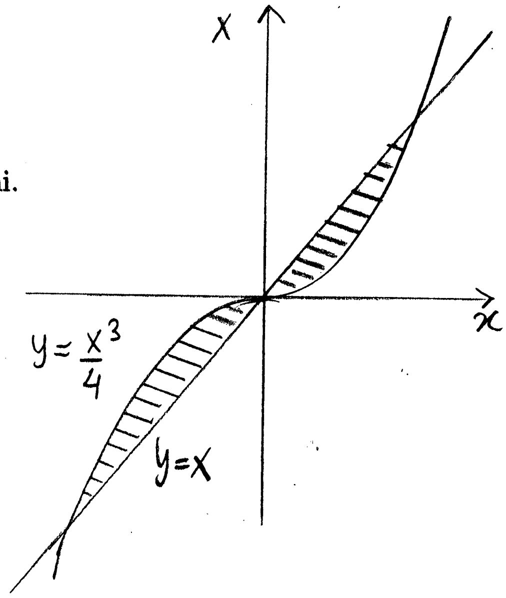
$$\begin{cases} 3x - y + w + 4z = -3 \\ -2x + 2y + w - 2z = 1 \\ x + y + 2w + 2z = -2 \\ -9x + 7y + 2w - 10z = 6 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r parallela al vettore $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, incidente l'asse y e la retta t: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z + 1$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 4}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 3ª E RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ -9 & 7 & 2 & -10 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+9A_1]{A_2+2A_1 \;\; A_3-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & 20 & 8 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-4A_2]{A_3+A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

car(A) = car(A|B) = 2

IL SISTEMA HA ∞^2 SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x + y + 2w + 2z = -2 \\ 4y + 5w + 2z = -3 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$ CON $s, t \in \mathbb{R}$, RICAVIAMO

$$y = \frac{-5s - 2t - 3}{4}, \quad x = \frac{5s + 2t + 3}{4} - 2s - 2t - 2 = \frac{-3s - 6t - 5}{4}$$

SOLUZIONE:

$$x = -\frac{3s + 6t + 5}{4}, \quad y = -\frac{5s + 2t + 3}{4}, \quad w = s, \quad z = t \quad \text{CON } s, t \in \mathbb{R}.$$

21/1/16 A

2) DETERMINIAMO IL PIANO π PASSANTE PER LA RETTA b : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ E PARALLELO AL VETTORE $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

π HA EQUAZIONE:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad 14(x+1) - 9(y-1) - 1(z+1) = 0$$

$$14x - 9y - z + 22 = 0.$$

L'INTERSEZIONE DI π CON L'ASSE y E' DATA DAL PUNTO $Q(0, y_0, 0)$ CON y_0 DATO DA

$$-9y_0 + 22 = 0 \implies y_0 = \frac{22}{9}$$

LA RETTA CERCATA E' LA RETTA PASSANTE PER Q E $\parallel \vec{u}$:

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{22}{9} - 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

---

3) $$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+4} = \frac{x^2+x-2}{(x-2)^2}$$

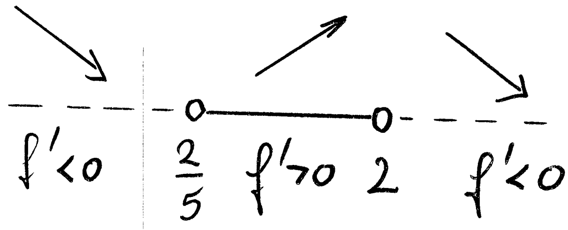
E' DEFINITA (E DERIVABILE) PER $x \neq 2$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \ ; \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty,$$

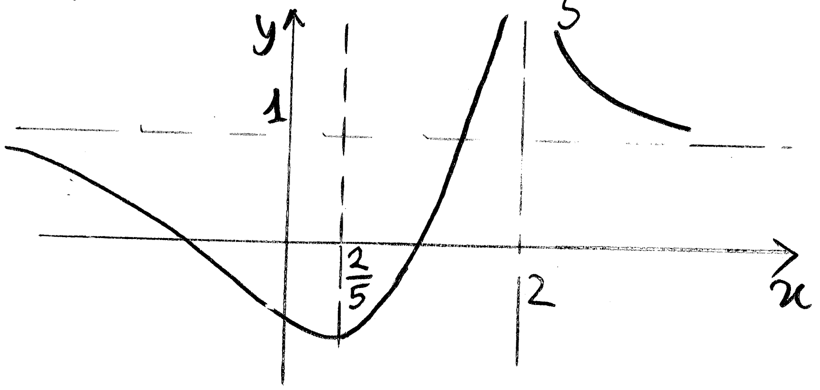
QUINDI $f(x)$ NON HA MASSIMI ASSOLUTI.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)(2-5x)}{(x-2)^4} = \frac{2-5x}{(x-2)^3} \quad \text{PER } x \neq 2.$$

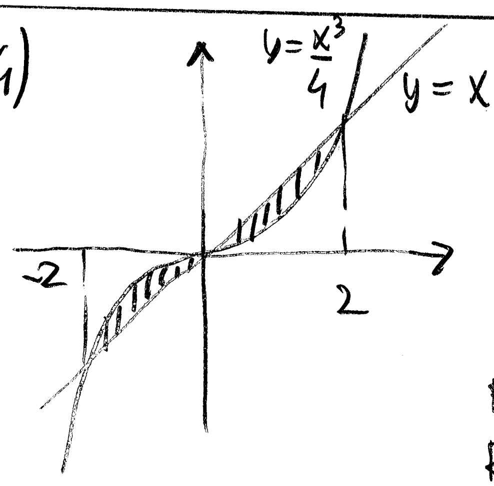


$$f'(x) > 0 \iff \frac{2}{5} < x < 2$$



$x = \frac{2}{5}$ MIN. REL. E ASSOLUTO

4)



$$\frac{x^3}{4} = x \iff x(x^2-4) = 0$$

$$\iff x = 0, \pm 2$$

POICHE' LA PARTE DI PIANO EVIDENZIATA E' SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE, ABBIAMO

$$A = 2\int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4}\right) dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2$$

$$= 2\left[\frac{4}{2} - \frac{16}{16} - 0\right] = 2.$$

(SOLUZIONE ALTERNATIVA) 21/1/16 A

2') DETERMINIAMO IL PIANO π_1 PASSANTE PER b E $/\!/ \vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

POICHE' b E DATA DA $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$

IL FASCIO DI PIANI PER b HA EQUAZIONE

$$\alpha(3x-2y+5) + \beta(y-3z-4) = 0$$

$$3\alpha x + (\beta-2\alpha)y - 3\beta z + 5\alpha - 4\beta = 0$$

IL PIANO DEL FASCIO $/\!/ \vec{u}$ E' DEFINITO DALLA CONDIZIONE

$$(-1)(3\alpha) + (-2)(\beta-2\alpha) + 4(-3\beta) = 0$$

$$\alpha - 14\beta = 0$$

SCELTO $\beta = 1$, ABBIAMO $\alpha = 14$, QUINDI

$$\pi_1: \ 42x - 27y - 3z + 66 = 0 \iff 14x - 9y - z + 22 = 0$$

DETERMINIAMO ORA IL PIANO PASSANTE PER L'ASSE y E $/\!/ \vec{u}$: IL FASCIO DI PIANI PER L'ASSE y E' DATO DA

$$\lambda x + \gamma z = 0$$

IL PIANO $/\!/ \vec{u}$ VERIFICA LA CONZIONE

$$-\lambda + 4\gamma = 0$$

SCELTO $\lambda = 4$, ABBIAMO $\gamma = 1$ E QUINDI IL PIANO $\pi_2: \ 4x + z = 0$. INFINE $r = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow$

$$r \begin{cases} 4x + z = 0 \\ 14x - 9y - z + 22 = 0 \end{cases}$$

B

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **21/1/16**

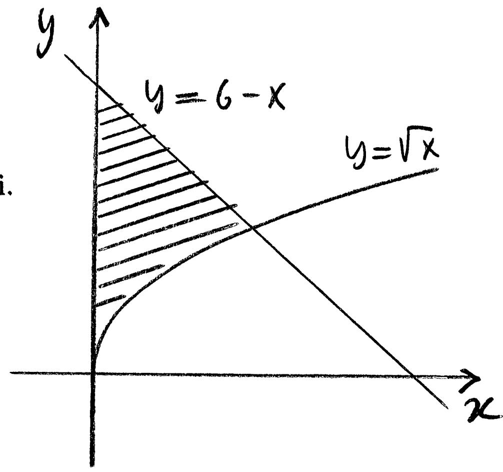
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - y + 2w + z = 0 \\ 3x + 2y + w - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 2 \\ x - 3y + w + 2z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.



2) Determinare l'equazione parametrica della retta r ottenuta proiettando (ortogonalmente) l'asse y sul piano π passante per $P(1, 2, -2)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2+8}$, $x \in \mathbf{R}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

B

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **21/1/16**

nome **cognome** **matr.**

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

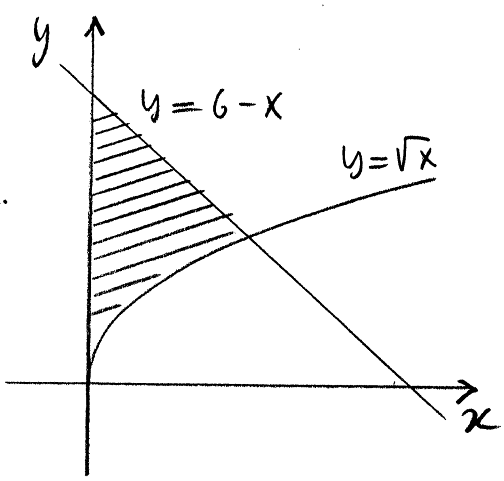
1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - y + 2w + z = 0 \\ 3x + 2y + w - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 2 \\ x - 3y + w + 2z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) **Determinare l'equazione parametrica della retta** r **ottenuta proiettando (ortogonalmente) l'asse** y **sul piano** π **passante per** $P(1,2,-2)$ **e parallelo ai vettori** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3) **Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2+8}$, $x \in \mathbf{R}$.



4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA LA 4ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 4A_1]{A_2 - 3A_1 \quad A_3 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 11 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 11 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 - A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B)$

IL SISTEMA HA ∞^2 SOLUZ.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - 3y + w + 2z = -1 \\ 11y - 2w - 7z = 4 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$ RICAVIAMO $y = \dfrac{2s + 7t + 4}{11}$

$$x = \frac{6s + 21t + 12}{11} - s - 2t - 1 = \frac{-5s - t + 1}{11}$$

ABBIAMO QUINDI LA SOLUZIONE

$x = \dfrac{-5s - t + 1}{11}$, $y = \dfrac{2s + 7t + 4}{11}$, $w = s$, $z = t$

$s, t \in \mathbb{R}$.

21/1/16 B

2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$

π HA EQUAZIONE

$$(x-1)(-1) + (y-2)\cdot 1 + (z+2)\cdot 4 = 0$$

$$-x + y + 4z + 7 = 0$$

DETERMINIAMO ORA IL PIANO $\pi_1 \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$
E PASSANTE PEL L'ASSE y : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

IL FASCIO DI PIANI PER L'ASSE y HA EQUAZIONE :

$$\alpha x + \beta z = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

$\pi_1 \parallel \vec{u} \wedge \vec{v}$ E' ALLORA INDIVIDUATO
DALLA CONDIZIONE $-\alpha + 4\beta = 0$. SCELTO $\beta = 1$
ABBIAMO $\alpha = 4$. $\Rightarrow$ $\pi_1 : 4x + z = 0$.

A QUESTO PUNTO

$$r = \pi \cap \pi_1 : \begin{cases} 4x + z = 0 \\ -x + y + 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

POSTO $x = t$ RICAVIAMO L'EQUAZIONE
PARAMETRICA DI r : $z = -4x$, $y = x - 4z - 7$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -7 + 17t \\ z = -4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

21/1/16 B

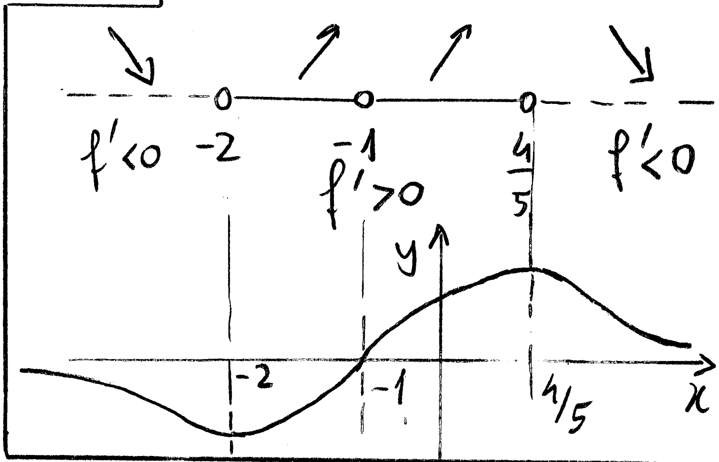
3) $f(x)$ E' DEFINITA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E DERIVABILE PER $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}(x^2+8) - 2x\sqrt[3]{(x+1)}}{(x^2+8)^2}$$

$$= -\frac{5x^2+6x-8}{3(x^2+8)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$= -\frac{5(x+2)\left(x-\frac{4}{5}\right)}{3(x^2+8)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$



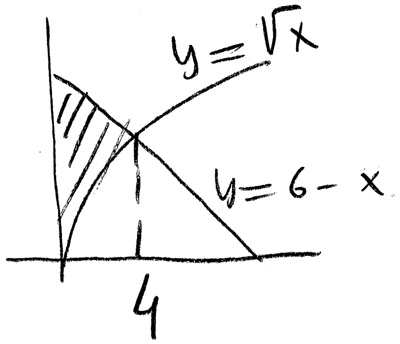
$\Rightarrow f'(x) > 0$ PER $-2 < x < \frac{4}{5}$, $x \neq -1$

QUINDI $x = -2$ E' MIN REL. ; $x = \frac{4}{5}$ MAX. REL.

POICHE' $f(-2) < 0$, $f\left(\frac{4}{5}\right) > 0$, $f(-1) = 0$

$f(x) > 0$ PER $x > -1$, $f(x) < 0$ PER $x < -1$

$x = -2$ E' MIN ASSOLUTO, $x = \frac{4}{5}$ MAX ASSOLUTO



$$\sqrt{x} = 6 - x \iff x = (6-x)^2$$
$$0 \leq x \leq 6$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases}$$

SOL. ACCETTABILE $x = 4$.

$$A = \int_0^4 (6 - x - \sqrt{x})\,dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4$$

$$= 24 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3}.$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/16 C

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

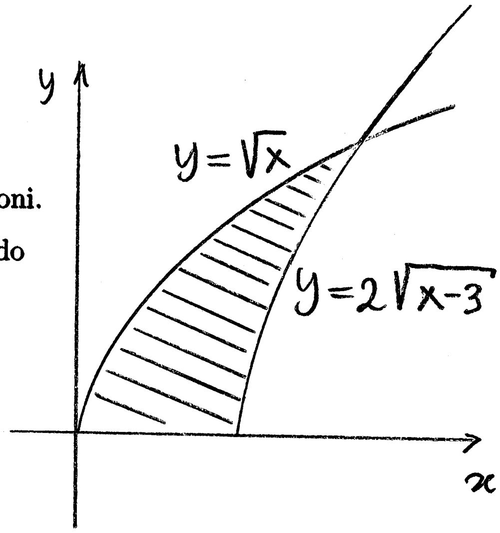
$$\begin{cases} 2x - y + w - z = 1 \\ x + 2y + w - 4z = -2 \\ 3x + 4y + 2w + z = -1 \\ 2x + w + z = 1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare l'equazione parametrica della retta r ottenuta proiettando (ortogonalmente) l'asse z sul piano π passante per $P(1,-1,0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **21/1/16** C

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

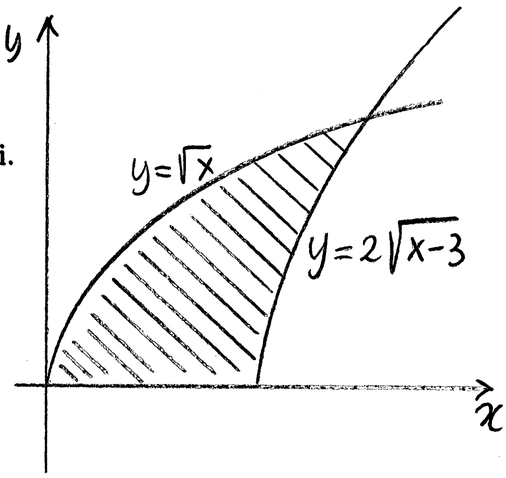
$$\begin{cases} 2x - y + w - z = 1 \\ x + 2y + w - 4z = -2 \\ 3x + 4y + 2w + z = -1 \\ 2x + w + z = 1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare l'equazione parametrica della retta r ottenuta proiettando (ortogonalmente) l'asse z sul piano π passante per $P(1,-1,0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_1]{A_2-2A_1,\ A_3-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 13 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2-A_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 13 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-4A_2]{A_3-2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

car $(A) =$ car $(A|B) = 3$

$\Rightarrow \infty^1$ SOLUZIONI

POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + w - 4z = -2 \\ -y - 2z = 0 \\ -w + 17z = 5 \end{cases}$$

$w = 17t - 5$

$y = -2t$

$x = 4t - 17t + 5 + 4t - 2$

$\quad = -9t + 3$

SOLUZIONE: $(-9t+3, -2t, 17t-5, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

21/1/16 C

2) $$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} - 6\vec{k}$$

QUINDI IL PIANO π HA EQUAZIONE

$$(x-1)(-2) + (y+1)\cdot 7 + z(-3) = 0$$

$$-2x + 7y - 3z + 9 = 0.$$

DETERMINIAMO ORA IL PIANO π_1 PASSANTE PER L'ASSE z E $// \ \vec{u}\wedge\vec{v}$:

ASSE z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad \alpha x + \beta y = 0 \qquad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$$-2\alpha + 7\beta = 0$$

SCELTO $\alpha = 7$, ABBIAMO $\beta = 2$ E QUINDI π_1 E' DATO DA $\quad 7x + 2y = 0.$

LA RETTA r SI OTTIENE ORA INTERSECANDO π_1 E π_2 :

$$r \quad \begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ -2x + 7y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

PER OTTENERE L'EQUAZIONE PARAMETRICA PONIAMO $x = t$ E RICAVIAMO :

$$y = -\frac{7}{2}t$$

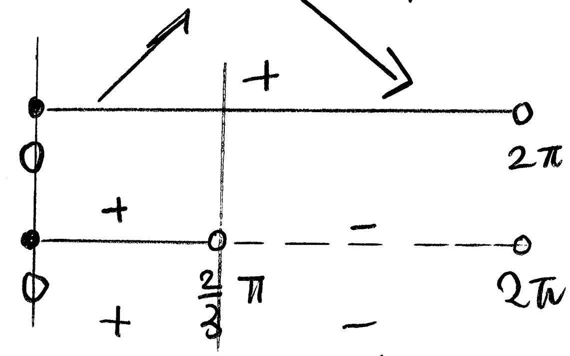
$$z = \frac{-2x + 7y + 9}{3} = \frac{-2t - \frac{49}{2}t + 9}{3} \stackrel{!}{=} \frac{-53t + 9}{3}.$$

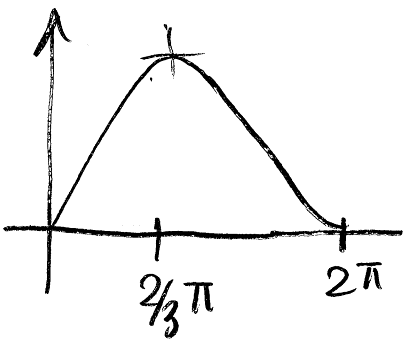
21/1/16 C

3) $$f'(x) = \cos x + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \overset{!}{=} \left[2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \overset{!}{=} 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]$$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 > 0$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} > 0$





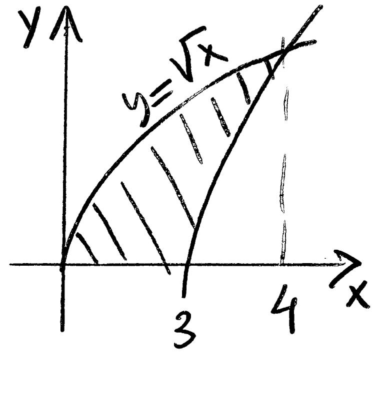
$x = \frac{2}{3}\pi$ MAX RELATIVO E ASSOLUTO

$x = 0$, $x = 2\pi$ MIN. RELATIVI.

POICHE' $f(0) = f(2\pi) = 0$, $x = 0, 2\pi$ SONO ANCHE MINIMI ASSOLUTI PER $f(x)$ IN $[0, 2\pi]$.

---

4) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2\sqrt{x-3} \end{cases} \iff \begin{matrix} x = 4(x-3) \\ x \geq 3 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 3x = 12 \\ x \geq 3 \end{matrix} \Rightarrow x = 4$



$$A = \int_0^3 \sqrt{x}\, dx + \int_3^4 \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{x-3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^3 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{4}{3}(x-3)^{3/2}\right]_3^4$$

$$= 2\sqrt{3} + \left(\frac{16}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(2\sqrt{3} - 0\right) = \frac{12}{3} = 4.$$

D

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

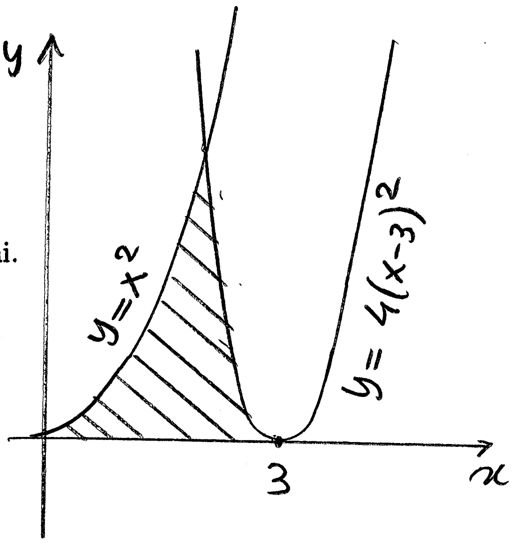
$$\begin{cases} x - y + w + z = 1 \\ x + y + 3w + 2z = -2 \\ x + 2y - 3w - z = 1 \\ -4y + 10w + 5z = -3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r parallela al vettore $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, incidente l'asse x e la retta t: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{4} = z - 1$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \tan x - 8 \sin x$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



D

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **21/1/16**

nome **cognome** **matr.**

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate tutti i risultati su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

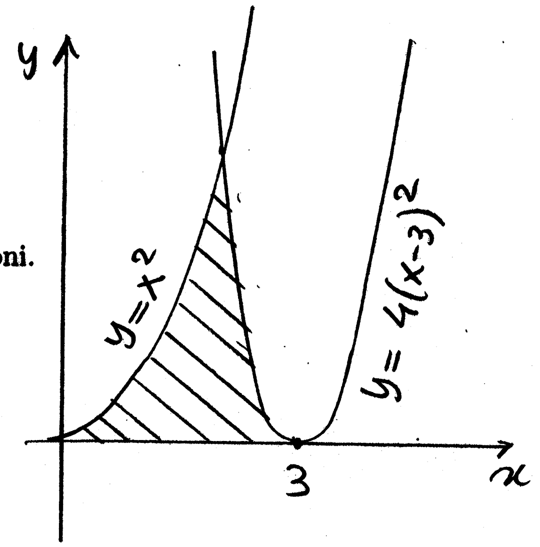
$$\begin{cases} x - y + w + z = 1 \\ x + y + 3w + 2z = -2 \\ x + 2y - 3w - z = 1 \\ -4y + 10w + 5z = -3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r parallela al vettore $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, incidente l'asse x e la retta t: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = z - 1$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \tan x - 8 \sin x$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3-A_1]{A_2-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+2A_2]{2A_3-3A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 14 & 7 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4+A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 3$. IL SISTEMA HA ∞^1 SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - y + w + z = 1 \\ 2y + 2w + z = -3 \\ -14w - 7z = 9 \end{cases}$$

POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

$w = \frac{-9-7t}{14}$, $y = -w - \frac{z}{2} - \frac{3}{2} = \frac{9+7t}{14} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{12}{14}$

$x = y - w - z + 1 = -\frac{12}{14} + \frac{9+7t}{14} - t + 1 = \frac{11-7t}{14}$

SOLUZIONE : $\left(\frac{11-7t}{14}, -\frac{6}{7}, -\frac{9+7t}{14}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

D 21/1/16

2) IL PIANO π_1 PASSANTE PER LA RETTA b E PARALLELO AL VETTORE $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 15(x-3)+10(y+1) - 10(z-1) = 0$$

$$\pi_1 : \quad 3x + 2y - 2z - 5 = 0$$

L'INTERSEZIONE DI π_1 CON L'ASSE X E' DATA DAL PUNTO $Q = (x_0, 0, 0)$ CON
$$3x_0 - 5 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{3}.$$

LA RETTA r E' QUINDI LA RETTA PASSANTE PER Q E $/\!/ \vec{w}$:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} + 2t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

---

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

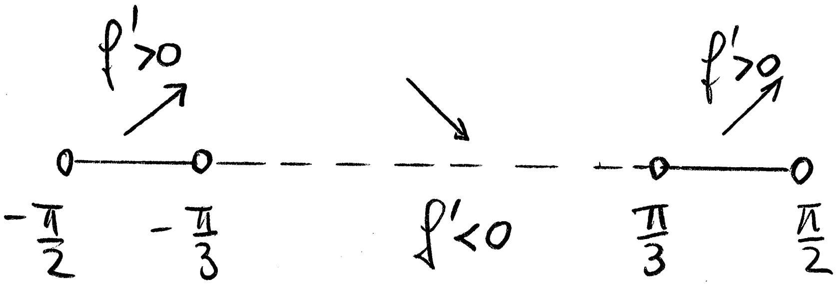
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 8\cos x = \frac{1 - 8\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ABBIAMO $f'(x) > 0 \iff$

$$\cos^3 x < \frac{1}{8} \iff \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3} \quad \text{OPPURE} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

21/1/16 D



$x = -\frac{\pi}{3}$ MAX REL.

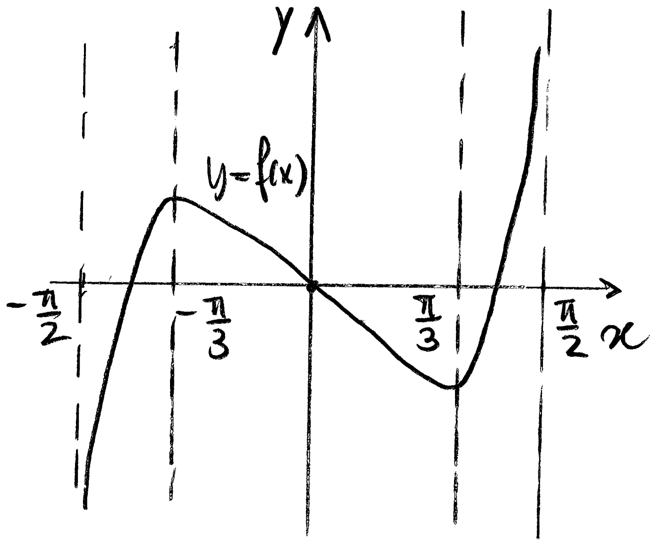
$x = \frac{\pi}{3}$ MIN REL.

POICHE'

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ NON HA MAX E MIN ASSOLUTI.



---

4) DETERMINIAMO IL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE DUE PARABOLE:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4(x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ (x-2)(x-6) = 0 \end{array}$$

IL PUNTO CERCATO HA COORDINATE $(2,4)$

$$A = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 4(x-3)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{4}{3}(x-3)^3\right]_2^3 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

21/1/16 D

(SOLUZIONE ALTERNATIVA)

2) SIANO π_1 IL PIANO PASSANTE PER b E $/\!/ \vec{w}$

π_2 IL " " PER L'ASSE x E $/\!/ \vec{w}$

AVREMO $a \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$ $\left(a = \pi_1 \cap \pi_2 \text{ SE } \pi_1 \not\parallel \pi_2 \right)$

POICHE' b HA FORMA CARTESIANA

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

IL FASCIO DI PIANI PER b E' DATO DA

$$\alpha(2x+y-5) + \beta(y-4z+5) = 0 \, , \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

$$2\alpha x + (\alpha+\beta) y - 4\beta z - 5\alpha + 5\beta = 0$$

IL PIANO $/\!/ \vec{w}$ E' ALLORA DATO DALLA CONDIZIONE

$$2\alpha \cdot 2 + (\alpha+\beta) \cdot 1 - 4\beta \cdot 4 = 0$$

$$5\alpha - 15\beta = 0$$

SCELTO $\beta = 1$, TROVIAMO $\alpha = 3$. ABBIAMO QUINDI

$$\pi_1 : \ 6x + 4y - 4z - 10 = 0.$$

CERCHIAMO ORA IL PIANO PASSANTE PER L'ASSE x E $/\!/ \vec{w}$:

ASSE x: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad \lambda y + \gamma z = 0 \, , \quad (\lambda,\gamma) \neq (0,0)$

IL PIANO $/\!/ \vec{w}$ SI OTTINE IMPONENDO CHE

$$\lambda \cdot 1 + \gamma \cdot 4 = 0$$

SCELTO $\lambda = 4$, TROVIAMO $\gamma = -1$

QUINDI $\pi_1 = 4y - z = 0$

$r = \pi_1 \cap \pi_2$

$$\begin{cases} 4y - z = 0 \\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$