Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14 1.1

nome cognome matr.

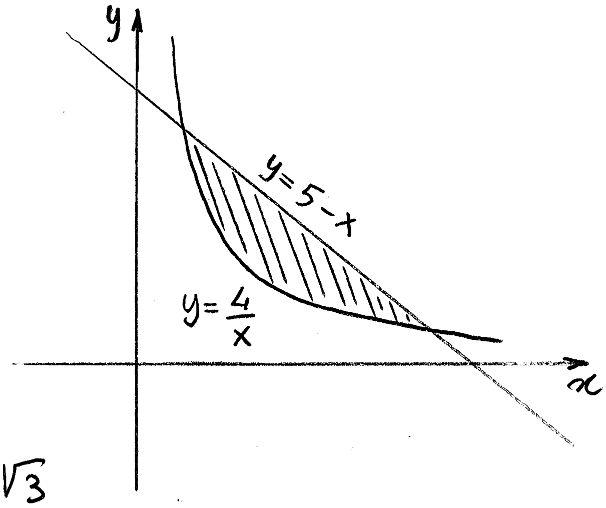
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare la retta tangente al grafico di $y = \sqrt[3]{\tan x}$ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{3}$.

2) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = e^{3x} - 12e^{x} - 9e^{-x}$ e dire se si tratta di etremi relativi e/o assoluti.

3) Calcolare il seguente integrale: $\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5-2x}} - \frac{1}{5-2x} \right) dx$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) $y' = \frac{1}{3}(\operatorname{tang} x)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

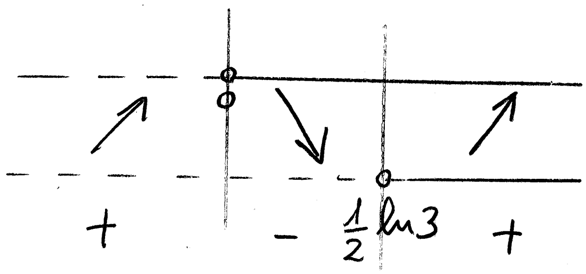
$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{3}$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 3^{-\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE $y = \sqrt[6]{3} + 4 \cdot 3^{-\frac{4}{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $f'(x) = 3e^{3x} - 12e^{x} + 9e^{-x} = 3e^{-x}(e^{4x} - 4e^{2x} + 3)$

$= 3e^{-x}(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 3)$

$f'(x) > 0 \iff (e^{2x} - 1)(e^{2x} - 3) > 0$



$x = 0$ MAX RELATIVO

$x = \frac{1}{2}\ln 3$ MIN. RELATIVO

POICHE' $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

LA FUNZIONE NON HA MASSIMI/MINIMI ASSOLUTI

4) DETERMINIAMO I PUNTI DI INTERSEZIONE

$$\begin{cases} y = 5-x \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \implies \begin{array}{c} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ (x-1)(x-4) = 0 \\ x = 1, \quad x = 4 \end{array}$$

$$A = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x\right]_1^4$$

$$= 20 - 8 - 4 \ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 .$$

3) $$\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5-2x}} - \frac{1}{5-2x}\right) dx = \left[-\sqrt{5-2x} + \frac{1}{2} \ln (5-2x)\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2} \ln 1\right) - \left(-3 + \frac{1}{2} \ln 9\right) = 2 - \ln 3 .$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14

nome cognome matr.

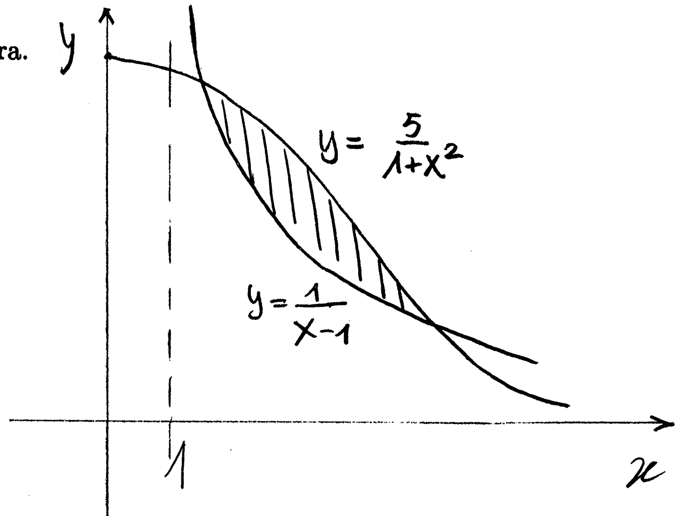
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare la retta tangente al grafico di $y = \cot(\pi - 3x)$ nel punto di coordinata $x = \frac{\pi}{4}$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = x^2 - \ln(1 + 2x)$ nell'intervallo $[0, 4]$.

3) Calcolare il seguente integrale: $\int_{-1}^{2} x \sqrt[3]{1 + 2x^2}\, dx$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1)

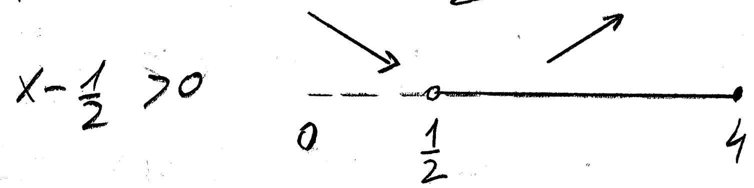
$$y' = \frac{-1}{\sin^2(\pi-3x)}(-3), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 6$$

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE $y = 1 + 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $$f' = 2x - \frac{2}{1+2x} = 2\,\frac{2x^2+x-1}{1+2x} = \frac{4(x+1)(x-\frac{1}{2})}{1+2x}$$

TENUTO CONTO CHE $x+1>0$ e $1+2x>0$ in $[0,4]$,

$f'(x) > 0 \iff x - \frac{1}{2} > 0$:

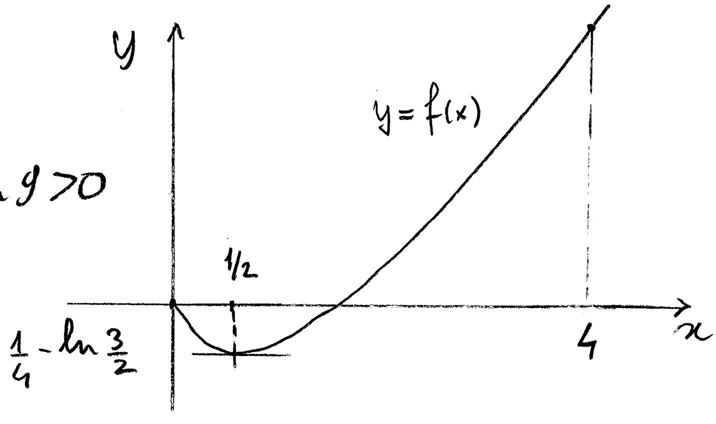


$x = \frac{1}{2}$ MIN. ASSOLUTO

$x = 0, 4$ MAX. RELATIVI

POICHE' $f(0) = 0$, $f(4) = 16 - \ln 9 > 0$

$x = 4$ E' MAX. ASSOLUTO.



3) $$\int_{-1}^{2} x\sqrt[3]{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}(1+2x^2)^{1/3}(4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}(1+2x^2)^{1/3}(1+2x^2)'\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}(1+2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{3}{16}\left(9^{\frac{4}{3}} - 3^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3^{7/3}}{16}\left(3^{4/3}-1\right).$$

4) DETERMINIAMO I PUNTI DI INTERSEZIONE DEI DUE GRAFICI

$$\begin{cases} y = \frac{5}{1+x^2} \\ y = \frac{1}{x-1} \end{cases} \qquad \frac{1}{x-1} = \frac{5}{1+x^2} \iff 1+x^2 = 5x-5$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-3)(x-2) = 0$$

$$A = \int_2^3 \left(\frac{5}{1+x^2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \left[5\arctan x - \ln(x-1)\right]_2^3$$

$$= 5\arctan 3 - \ln 2 - 5\arctan 2 + 0$$

$$= 5(\arctan 3 - \arctan 2) - \ln 2.$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14

nome cognome matr.

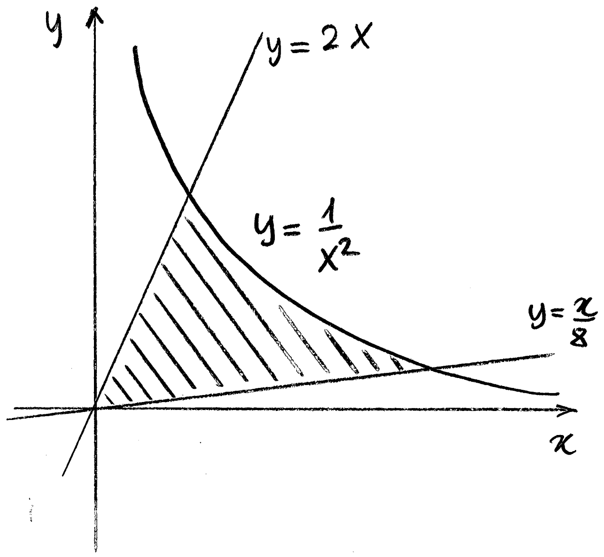
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare l'equazione della tangente al grafico di $y = \sqrt[3]{x-5}$ parallela alla retta $r:\ x - 3y - 1 = 0$.

2) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = (x+1)^2 e^{-x^2}$ e dire se si tratta di estremi relativi e/o assoluti.

3) Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 3x + \cos(\pi - x))\, dx$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-5)^2}}$ $(x \neq 5)$

POICHE' LA RETTA $r:\ x-3y+1=0$

HA COEFF. ANG. $m = \frac{1}{3}$, DETERMINIAMO I PUNTI DI

TANGENZA IMPONENDO CHE SIA $y' = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3}(x-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \iff (x-5)^{-\frac{2}{3}} = 1 \iff x = 4,\ x = 6.$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO LE TANGENTI $y = \frac{x}{3} - 1$ e $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$

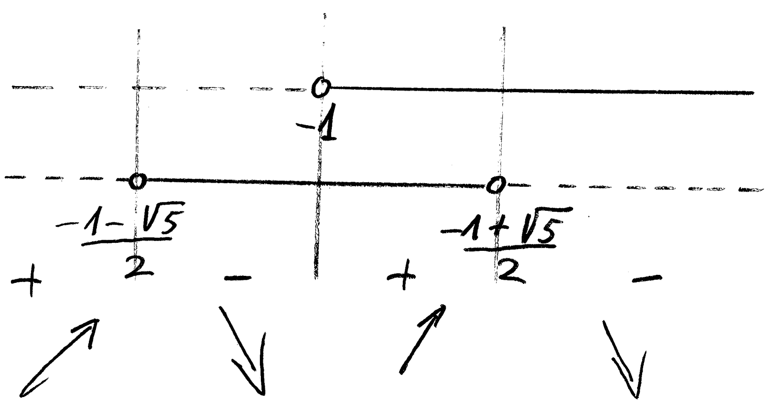
2) $f'(x) = 2(x+1)e^{-x^2} - 2x(x+1)^2 e^{-x^2}$

$= 2e^{-x^2}(x+1)(1-x-x^2)$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \iff (x+1)(1-x-x^2) > 0$

$x+1>0$

$1-x-x^2>0$



$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ MAX. REL., $x = -1$ MIN. REL.

OSSERVANDO CHE $f(x) \geq 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

E CHE

$$f(-1) = 0, \quad f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) > f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0,$$

ABBIAMO $\quad X = 1 \quad$ MIN. ASSOLUTO

$\quad X = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad$ MAX. ASSOLUTO

3) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\operatorname{sen}(3x) + \cos(\pi - x)\right) dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x - \operatorname{sen}(\pi - x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cos 3\pi - \operatorname{sen} 0\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

4) $$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \quad x^3 = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \begin{cases} y = \frac{x}{8} \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad x = 2$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \left(2x - \frac{x}{8}\right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) dx$$

$$= \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{16}\right]_{1/\sqrt[3]{2}}^{2}$$

$$= \frac{15}{16}\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{16} + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{3}{4} + \sqrt[3]{2}$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14 4.1

nome cognome matr.

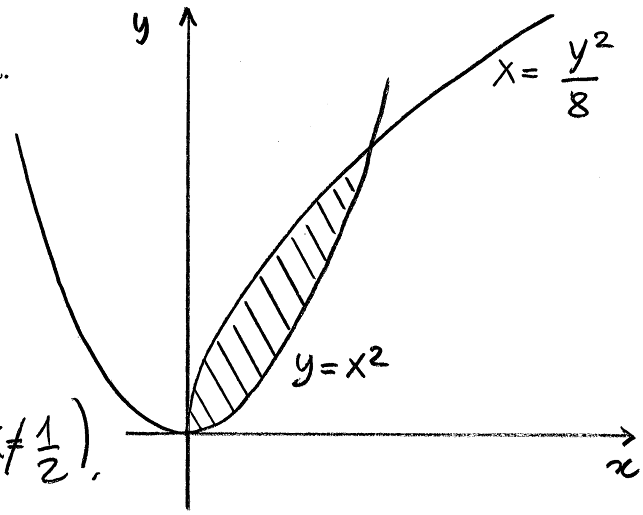
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le equazioni delle tangenti al grafico di $y = \dfrac{x}{1-2x}$ parallele alla retta $r: \ x - 9y + 4 = 0$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = 2 - \sin^2 x + \sin^4 x$ per $x \in [0, \pi]$.

3) Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{e^{-2x} + e^{3x}}{e^x}\,dx$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1)

$$y' = \frac{1-2x - x(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{1}{(1-2x)^2} \quad (x \neq \tfrac{1}{2}).$$

POICHE' LA RETTA r HA COEFF. ANG. $m = \frac{1}{9}$, DETERMINIAMO I PUNTI DI TANGENZA IMPONENDO LA CONDIZIONE $y' = \frac{1}{9}$:

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{9} \iff 1-2x = \pm 3 \iff \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}$$

QUINDI IL GRAFICO HA 2 TANGENTI $// \ r$:

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x+1) = \frac{x}{9} - \frac{2}{9},$$

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) = \frac{x}{9} - \frac{8}{9}.$$

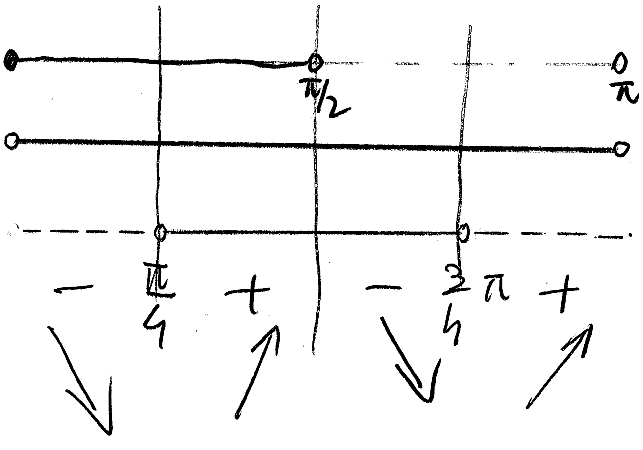
2) $f'(x) = -2\cos x \,\text{sen}\, x + 4\,\text{sen}^3 x \cos x$

$= 2\cos x\,\text{sen}\,x\,(2\,\text{sen}^2 x - 1)$

$\cos x > 0$

$\text{sen}\, x > 0$

$2\,\text{sen}^2 x - 1 > 0$



$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ MIN. REL

$x = 0, \; x = \frac{\pi}{2}, \; x = \pi$ MAX. REL

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$f(0) = f(\pi) = 2 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ MIN. ASSOLUTI ; $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ MAX. ASSOLUTI

3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{e^{-2x} + e^{3x}}{e^x} dx = \int_{-1}^{2} \left(e^{-3x} + e^{2x}\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{2x}\right]_{-1}^{2}$

$= -\frac{1}{3} e^{-6} + \frac{1}{2} e^{4} + \frac{1}{3} e^{3} - \frac{1}{2} e^{-2}$

4) DETERMINIAMO I PUNTI DI INTERSEZIONE :

$\begin{cases} y = \sqrt{8x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{8}\sqrt{x} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

$A = \displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{8x} - x^2\right) dx = \left[\sqrt{8}\, \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= \sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

5,1

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \log_2(1+3x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = x\ln^2 x$ in $(0,\infty)$.

3) Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos^2 x}\,dx$.

4) Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa fra le parabole $y = 2x^2+4x-2$ e $y = x^2+5x+4$.

1) $y = \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln 2}$ $\quad y' = \dfrac{3}{\ln 2\,(1+3x)}$

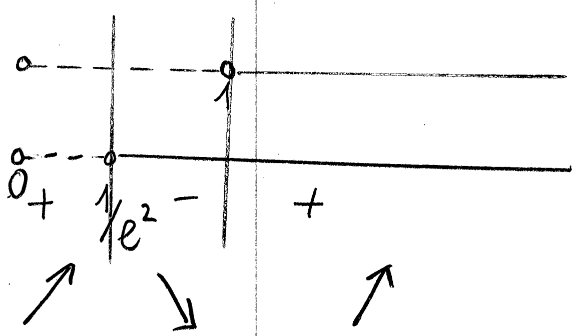
$y(1) = 2$, $y'(1) = \dfrac{3}{4\ln 2}$ $\Rightarrow$ LA RETTA TANG. HA EQUAZIONE

$$y = 2 + \frac{3}{4\ln 2}(x-1)$$

2) $f'(x) = 1\cdot\ln^2 x + \dfrac{2x}{x}\ln x = \ln x\,(2+\ln x)$

$\ln x > 0$

$2+\ln x > 0$



$x = 1/e^2$ MAX. REL.

$x = 1$ MIN. REL.

POICHE' $f(x) \geq 0$ in $(0,\infty)$ E $f(1) = 0$

$x = 1$ E' MIN. ASSOLUTO.

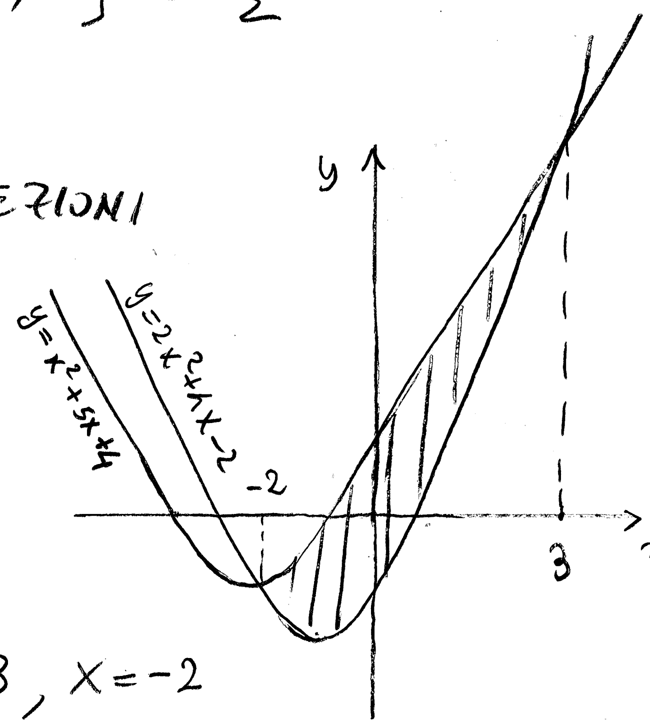
$x = 1/e^2$ NON E' MAX ASSOLUTO PERCHE' $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) $$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos^2 x}\,dx = -\int_0^{\pi/4} (1-\tan x)(1-\tan x)'\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(1-\tan x)^2\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(1-1)^2-(1-0)^2\right] = \frac{1}{2}$$

4) DETERMINIAMO LE INTERSEZIONI DELLE DUE PARABOLE



$$\begin{cases} y = 2x^2+4x-2 \\ y = x^2+5x+4 \end{cases}$$

$$2x^2+4x-2 = x^2+5x+4$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0 \implies x=3,\ x=-2$$

$$A = \int_{-2}^{3}\left[(x^2+5x+4)-(2x^2+4x-2)\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{3}$$

$$= -9+\frac{9}{2}+18-\frac{8}{3}-2+12 = 19+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}$$

$$= \frac{114+27-16}{6} = \frac{125}{6}$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 21/1/14

nome cognome matr.

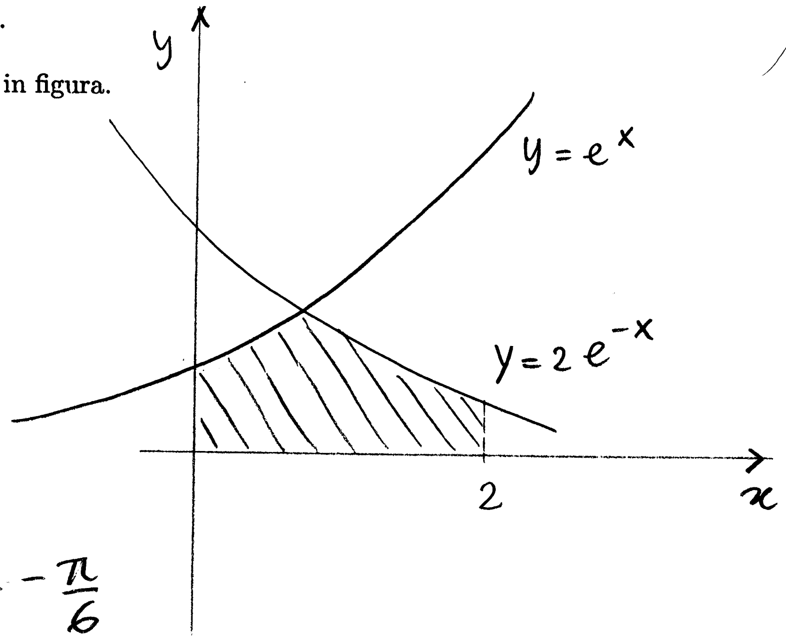
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare la retta tangente al grafico di $y = \arctan(2x)$ nel punto di coordinata $x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ nell'intervallo $[2, 4]$.

3) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^1 \frac{1}{(4-3x)^3}\,dx$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) $y\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \text{arctang}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$y' = \frac{2}{1+4x^2}$, $y'\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE $y = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

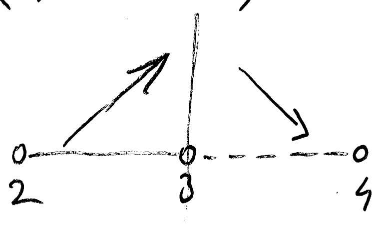
2) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\,\sqrt{4-x}}$, $2 < x < 4$

$f'(x) > 0 \iff \begin{matrix}\sqrt{4-x} > \sqrt{x-2} \\ 2 < x < 4\end{matrix} \iff \begin{matrix}4-x > x-2 \\ 2 < x < 4\end{matrix}$

$\iff x < 3,\ 2 < x < 4$

$f'(x) > 0$ in $(2,3)$

$f'(x) < 0$ in $(3,4)$



$x = 3$ MAX REL. E ASSOLUTO

$f(2) = f(4) = \sqrt{2} \Rightarrow x=2,\ x=4$ MINIMI ASSOLUTI

3) $\int_0^1 \frac{1}{(4-3x)^3}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(4-3x)^2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{4^2}\right] = \frac{1}{\cancel{6}_2}\,\frac{\cancel{15}^5}{16} = \frac{5}{32}.$

4) DETERMINIAMO L'INTERSEZIONE DEI DUE GRAFICI:

$\begin{cases} y = e^x \\ y = 2e^{-x} \end{cases} \Rightarrow e^x = 2e^{-x}$

$e^{2x} = 2$

$x = \frac{1}{2}\ln 2$

$A = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} e^x + \int_{\frac{\ln 2}{2}}^2 (2e^{-x})\,dx$

$= [e^x]_0^{\frac{\ln 2}{2}} + 2\left[-e^{-x}\right]_{\frac{\ln 2}{2}}^2$

$= \sqrt{2} - 1 - 2\left(e^{-2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - 1 - 2e^{-2}$