Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 20/1/16 A

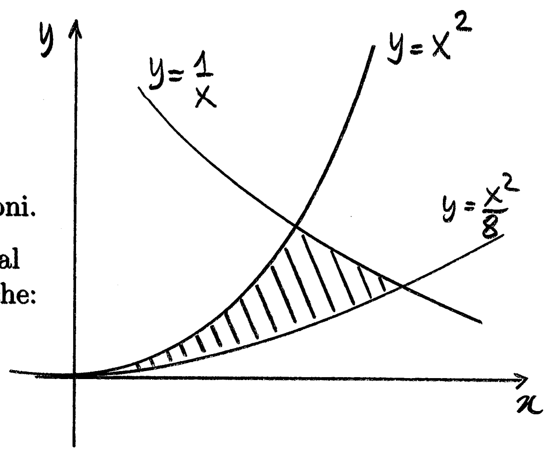
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x - y + 2w + z = 5 \\ 3x + y - 2w + 2z = 2 \\ x + 3y - 6w + 3z = -1 \\ -4x - 4y + 8w - 5z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.



2) Determinare la retta a passante per $P(2,1,0)$, ortogonale al vettore al vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e incidente la retta b di equazioni parametriche: $x = 3 - 2t$, $y = t$, $z = 4 - t$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 3}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **20/1/16** A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

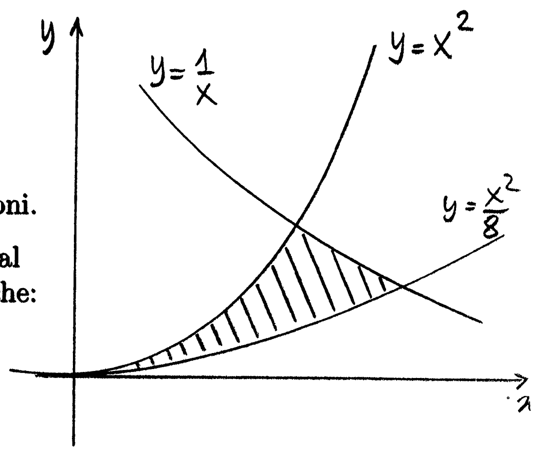
1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x - y + 2w + z = 5 \\ 3x + y - 2w + 2z = 2 \\ x + 3y - 6w + 3z = -1 \\ -4x - 4y + 8w - 5z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta a passante per $P(2,1,0)$, ortogonale al vettore al vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e incidente la retta b di equazioni parametriche: $x = 3 - 2t$, $y = t$, $z = 4 - t$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 3}$.



4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 3ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -6 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ -4 & -4 & 8 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+4A_1]{\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-5A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 16 & -7 & 5 \\ 0 & -16 & 32 & -14 & 10 \\ 0 & 8 & -16 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+A_2]{A_3-2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 16 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$CAR(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZ.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x + 3y - 6w + 3z = -1 \\ -8y + 16w - 7z = 5 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$

RICAVIAMO $y = \dfrac{16s - 7t - 5}{8}$

$x = -\dfrac{3}{8}(16s - 7t - 5) + 6s - 3t - 1 \overset{!}{=} \dfrac{-3t + 7}{8}$. LA SOLUZIONE E' QUINDI DATA DA

$x = \dfrac{-3t+7}{8}$, $y = \dfrac{16s - 7t - 5}{8}$, $w = s$, $z = t$;

$s, t \in \mathbb{R}$.

2) LA RETTA CERCATA APPARTIENE AL PIANO π PASSANTE PER $P(2,1,0)$ E $\perp \vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

IL PIANO π HA EQUAZIONE:

$$(x-2)\cdot 2 + (y-1)(-1) + z \cdot 3 = 0$$

$$2x - y + 3z - 3 = 0$$

DETERMINIAMO $Q = \pi \cap b$

$$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = 4-t \\ 2x - y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(3-2t) - t + 3(4-t) - 3 = 0 \\ 15 - 8t = 0 \Rightarrow t = \frac{15}{8} \end{array}$$

$$Q = \left(3 - 2\cdot\frac{15}{8},\ \frac{15}{8},\ 4 - \frac{15}{8}\right) = \left(-\frac{6}{8},\ \frac{15}{8},\ \frac{17}{8}\right).$$

LA RETTA a HA EQUAZIONE:

$$\frac{x-2}{-\frac{6}{8}-2} = \frac{y-1}{\frac{15}{8}-1} = \frac{z-0}{\frac{17}{8}-0} \Rightarrow \frac{x-2}{-22} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{17}.$$

---

3) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-3x+3}$ $\quad$ DOM$(f) = \mathbb{R}$ POICHE' $x^2 - 3x + 3 > 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-3x+3) - (x^2+x-1)(2x-3)}{(x^2-3x+3)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+8x}{(x^2-3x+3)^2} = \frac{4x(2-x)}{(x^2-3x+3)^2}$$

$\searrow$ $\quad\quad$ $\nearrow$ $\quad\quad$ $\searrow$

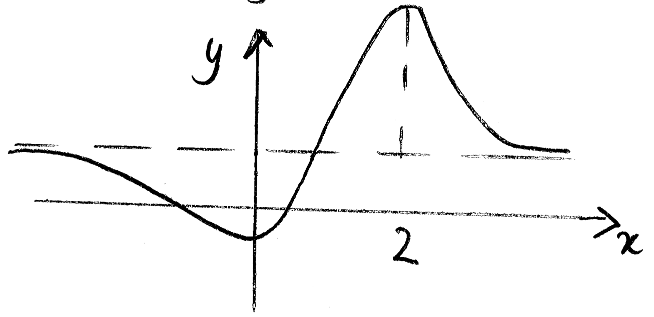
$f'<0$ $\quad$ 0 $\quad$ $f'>0$ $\quad$ 2 $\quad$ $f'<0$

20/1/16 A3

QUINDI $x=0$ E' MIN RELATIVO

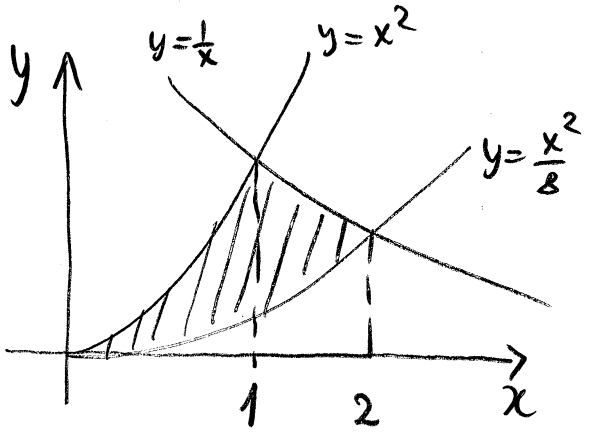
$x=2$ E' MAX RELATIVO

$f(0) = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 5$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$



$\Rightarrow$ $x=0$ MIN. ASSOLUTO

$x=2$ MAX ASSOLUTO



$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \frac{x^2}{8} \end{cases} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx$$

$$= \frac{7}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 = \frac{7}{24} + \ln 2 - \frac{8}{24} + \frac{1}{24}$$

$$= \ln 2.$$

B

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria

20/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

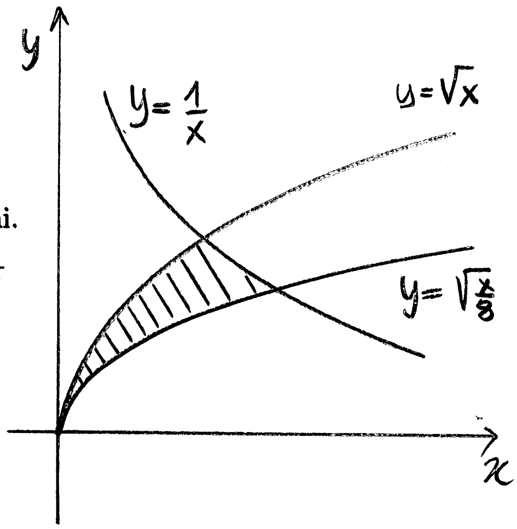
$$\begin{cases} -x+2y+w-4z=3 \\ 2x+y-w+3z=2 \\ 5x-3w+10z=1 \\ 5x+5y-2w+5z=9 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P(-5,2,-1)$ sul piano π passante per la retta $\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+3}{-1}$ e parallelo al vettore $\mathbf{w}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=2\cos x-\ln(\cos x)$ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



B

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 20/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

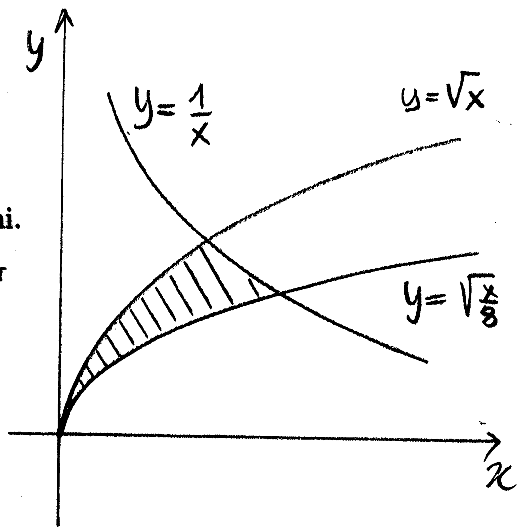
$$\begin{cases} -x+2y+w-4z=3 \\ 2x+y-w+3z=2 \\ 5x-3w+10z=1 \\ 5x+5y-2w+5z=9 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P(-5,2,-1)$ sul piano π passante per la retta $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+3}{-1}$ e parallelo al vettore $\mathbf{w}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=2\cos x-\ln(\cos x)$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & 10 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+5A_1]{A_2+2A_1,\ A_3+5A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 10 & 2 & -10 & 16 \\ 0 & 15 & 3 & -15 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-3A_2]{A_3-2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{car}(A)=\mathrm{car}(A|B)=2$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-2}=\infty^2$ SOLUZ.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} -x+2y+w-4z=3 \\ 5y+w-5z=8 \end{cases}$$

POSTO $w=s$, $z=t$, $s,t\in\mathbb{R}$

$$y=\frac{8-s+5t}{5}$$

$$x=2y+w-4z-3=\frac{16-2s+10t}{5}+s-4t-3=\frac{1+3s-10t}{5}$$

IL SISTEMA HA QUINDI SOLUZIONE:

$$x=\frac{1+3s-10t}{5},\quad y=\frac{8-s+5t}{5},\quad w=s,\quad z=t,$$

$s,t\in\mathbb{R}$.

2) IL PIANO π PASSA PER $(1,0,-3)$ ED E' ORTOGONALE A $(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge\vec{w}$:

$$(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}.$$

QUINDI π HA EQUAZIONE

$$2(x-1)-7y-3(z+3)=0$$

$$2x-7y-3z-11=0.$$

LA RETTA $r \perp \pi$ E PASSANTE PER $P(-5,2,-1)$ HA EQUAZIONE PARAMETRICA :

$r: \quad x=-5+2t, \quad y=2-7t, \quad z=-1-3t \quad , t\in\mathbb{R}.$

DETERMINIAMO INFINE L'INTERSEZIONE, Q, FRA LA RETTA r E IL PIANO π :

$$2(-5+2t)-7(2-7t)-3(-1-3t)-11=0$$

$$-32+62t=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{16}{31}$$

$$Q=\left(-5+2\cdot\frac{16}{31},\ 2-7\cdot\frac{16}{31},\ -1-3\cdot\frac{16}{31}\right)$$

$$=\left(-\frac{123}{31},\ -\frac{50}{31},\ -\frac{79}{31}\right).$$

Q E' LA PROIEZIONE RICHIESTA.

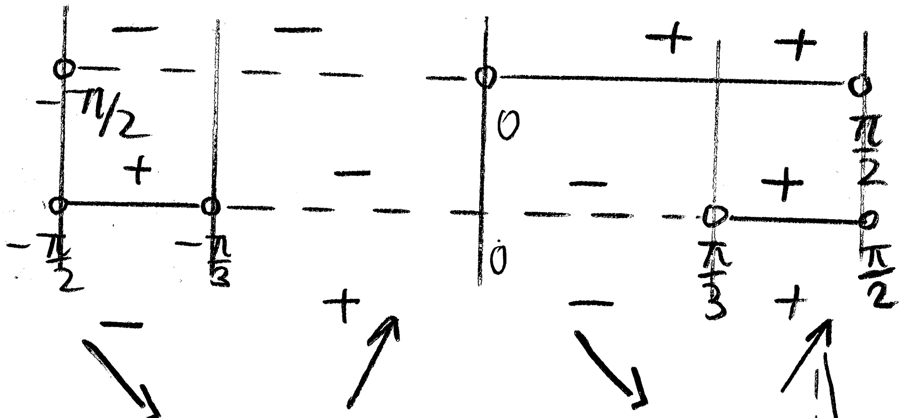
3) POICHE' $\cos x > 0$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE NELL'INTERVALLO DATO: **B**

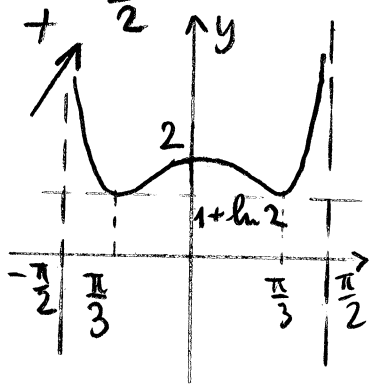
$$f'(x) = -2\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x\,(1-2\cos x)}{\cos x}$$

$$f'(x) > 0 \text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \iff \sin x\,(1-2\cos x) > 0$$

$\sin x > 0$

$1-2\cos x > 0$



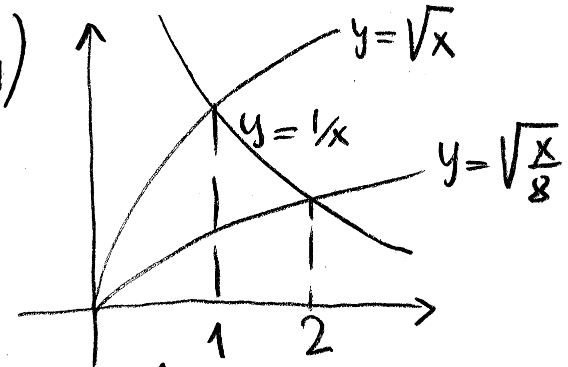


$\Rightarrow$ $x = \pm\frac{\pi}{3}$ MIN. REL., $x = 0$ MAX REL.

POICHE' $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$

$x = \pm\frac{\pi}{3}$ MIN. ASSOLUTO, $f(x)$ NON HA MAX. ASSOLUTO

4)



$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^{3/2} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \sqrt{\frac{x}{8}} \end{cases} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2$$

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{8}}\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{8}}\right)dx$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ln 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \ln 2.$$

B

2') DETERMINIAMO IL FASCIO DI PIANI PASSANTE PER LA RETTA DATA $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+3}{-1}$:

$$\alpha(x-2y-1) + \beta(y+z+3) = 0$$

$$\alpha x + (\beta - 2\alpha)y + \beta z - \alpha + 3\beta = 0.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

IL PIANO DEL FASCIO $\parallel \vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ E' ALLORA DATO DALLA CONDIZIONE

$$\alpha \cdot 1 + (\beta - 2\alpha)(-1) + \beta \cdot 3 = 0$$

$$3\alpha + 2\beta = 0.$$

SCELTO $\alpha = 2$, ABBIAMO $\beta = -3$. IL PIANO DEL FASCIO $\parallel \vec{w}$ HA EQUAZIONE:

$$2x - 7y - 3z - 11 = 0.$$

LA RETTA $r \perp \pi$ E PASSANTE PER $P(-5,2,-1)$ HA QUINDI EQUAZIONE

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

DETERMINIAMO ORA L'INTERSEZIONE Q FRA r E π:

$$2(-5+2t) - 7(2-7t) - 3(-1-3t) - 11 = 0$$

$$-32 + 62t = 0 \Rightarrow t = \frac{16}{31}.$$

$$Q = \left(-5 + 2 \cdot \frac{16}{31}, 2 - 7\frac{16}{31}, -1 - 3\frac{16}{31}\right) = \left(-\frac{123}{31}, -\frac{50}{31}, -\frac{79}{31}\right)$$

Q E' LA PROIEZIONE ORTOGONALE RICHIESTA.

C

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 20/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

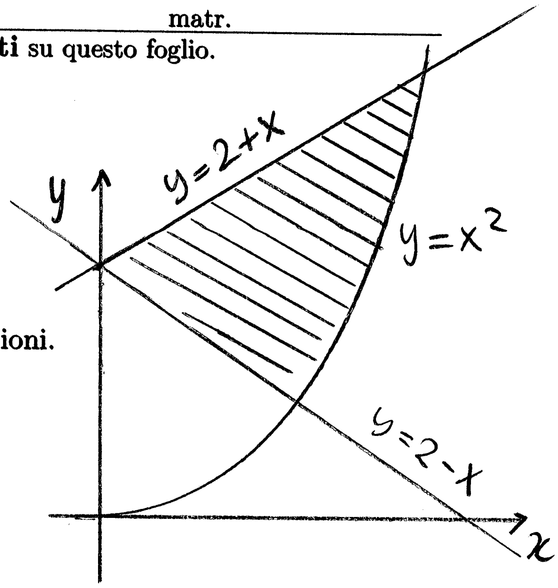
$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-3 \\ x+y-2w+3z=4 \\ 3x-y+w+2z=2 \\ 4x-y-2w+9z=7 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P(0,5,\ \ 5)$ sul piano π passante per la retta $\dfrac{x+3}{4}=y+1=\dfrac{z+2}{2}$ e parallelo al vettore $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



C

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 20/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

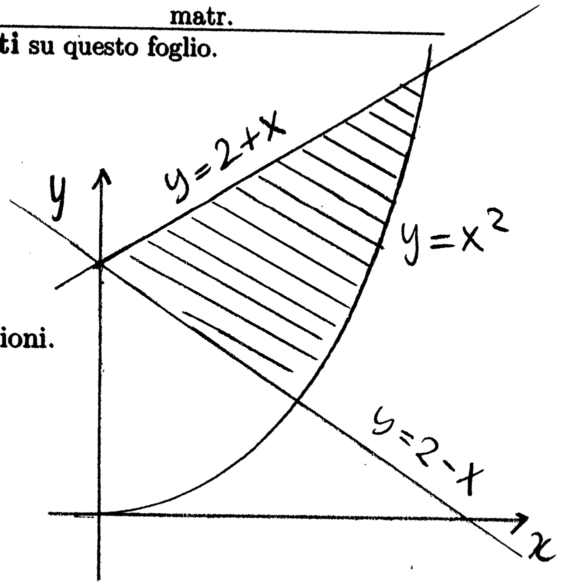
$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-3 \\ x+y-2w+3z=4 \\ 3x-y+w+2z=2 \\ 4x-y-2w+9z=7 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P(0,5,+5)$ sul piano π passante per la retta $\frac{x+3}{4}=y+1=\frac{z+2}{2}$ e parallelo al vettore $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 9 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+4A_1]{A_2+A_1,\ A_3+3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & -9 & 2 & 13 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4-9A_2]{A_3-7A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -23 & -14 \\ 0 & 0 & 11 & -23 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -23 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{CAR}(A) = \text{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI.

$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-3 \\ -y-w+4z=1 \\ 11w-23z=-14 \end{cases} \Rightarrow z=t\in\mathbb{R},\quad w=\frac{23t-14}{11},$$

$$y = 4z-w-1 = 4t-\frac{23t-14}{11}-1 = \frac{21t+3}{11}$$

$$x=-2y+w+z+3 = -\frac{42t+6}{11}+\frac{23t-14}{11}+t+3 = \frac{-8t+13}{11}$$

$t\in\mathbb{R}$.

20/1/16 C

2) DETERMINIAMO IL FASCIO DI PIANI PASSANTE PER LA RETTA $\frac{x+3}{4} = y+1 = \frac{z+2}{2}$:

$$\alpha(x-4y-1) + \beta(2y-z) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

non tutti nulli

$$\alpha x + (2\beta - 4\alpha)y - \beta z - \alpha = 0$$

TROVIAMO ORA IL PIANO $\pi \parallel \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$$2 \cdot \alpha + (-1) \cdot (2\beta - 4\alpha) - 3 \cdot \beta = 0$$

$$6\alpha - 5\beta = 0$$

SCELTO $\alpha = 5$, ABBIAMO $\beta = 6$. IL PIANO π HA EQUAZIONE

$$5x - 8y - 6z - 5 = 0$$

LA RETTA $r \perp \pi$ E PASSANTE PER $P(0,5,5)$ HA EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 5 - 8t \\ z = 5 - 6t \end{cases}$$

QUINDI $Q = \pi \cap r$ E' DATO DA

$$25t - 8(5-8t) - 6(5-6t) - 5 = 0$$

$$125t - 75 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{5}$$

$$Q = \left(5 \cdot \frac{3}{5}, \; 5 - 8 \cdot \frac{3}{5}, \; 5 - 6 \cdot \frac{3}{5}\right) = \left(3, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

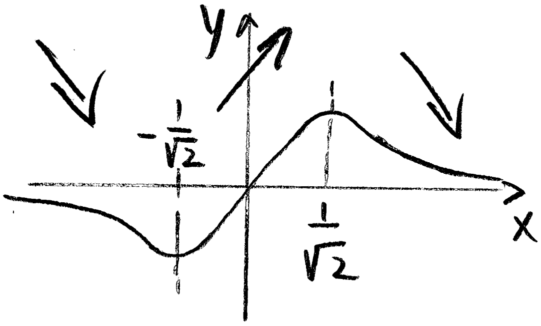
20/1/16 C

3) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$ E' DEFINITA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2} 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$f'(x) > 0 \iff 1-2x^2 > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ MIN REL. , $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ MAX. REL.



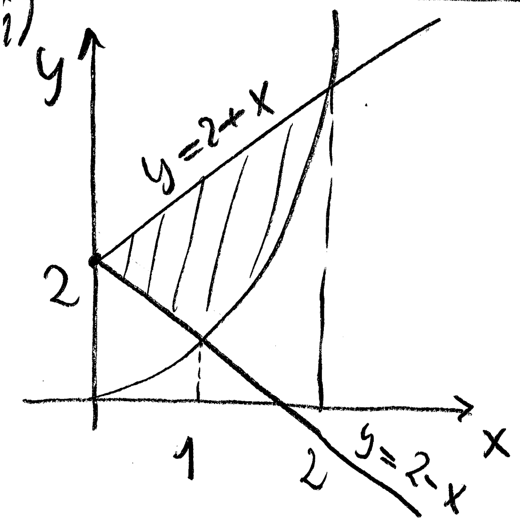
POICHE' $f(x) > 0$ PER $x > 0$
E $f(x)$ E' DISPARI, SI HA:

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ MIN. ASSOLUTO

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ MAX ASSOLUTO.

---

i)



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ (x-1)(x+2)=0 \end{array} \quad \boxed{x=1}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x-2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x^2-x+2=0 \\ (x-2)(x+1)=0 \end{array} \quad \boxed{x=2}$$

$$A = \int_0^1 [(2+x)-(2-x)]\,dx + \int_1^2 (2+x-x^2)\,dx$$

$$= [x^2]_0^1 + \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + 4 + \cancel{2} - \frac{8}{3}$$

$$-\cancel{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{7}{3} = \frac{13}{6}.$$

D

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 20/1/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

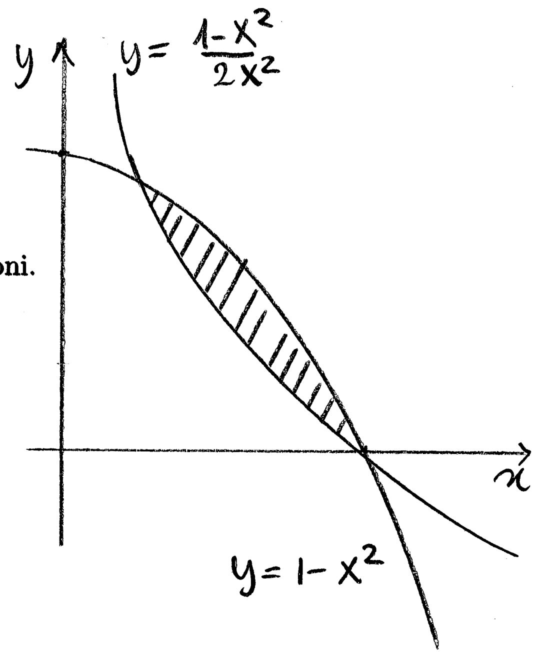
$$\begin{cases} 3x - y + 3w + z = -3 \\ 2x + 3y - 3w + 2z = 0 \\ x + 2y - w + z = -2 \\ x - 6y + 4w - z = 5 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta a passante per $P(-1,0,4)$, ortogonale al vettore $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e incidente la retta b di equazioni parametriche: $x = 1 - t$, $y = 2 - 3t$, $z = 2t$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$, nell'intervallo $[0, \pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



D

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria **20/1/16**

nome ____ **cognome** ____ **matr.** ____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

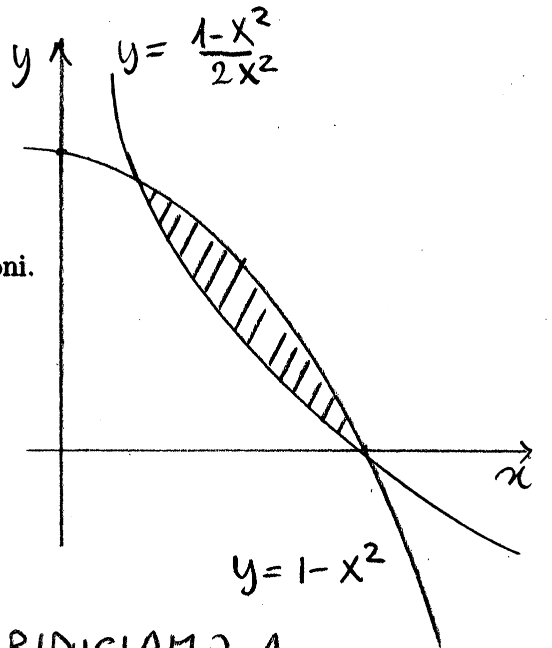
$$\begin{cases} 3x - y + 3w + z = -3 \\ 2x + 3y - 3w + 2z = 0 \\ x + 2y - w + z = -2 \\ x - 6y + 4w - z = 5 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta a passante per $P(-1,0,4)$, ortogonale al vettore $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e incidente la retta b di equazioni parametriche: $x = 1 - t,\ y = 2 - 3t,\ z = 2t,\ t \in \mathbf{R}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$, nell'intervallo $[0, \pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 3ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -6 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - A_1]{A_2 - 2A_1,\ A_3 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -8 & 5 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 8A_1]{A_3 - 7A_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4 - A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA HA ∞^1 SOLUZ.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x + 2y - w + z = -2 \\ -y - w = 4 \\ 13w - 2z = -25 \end{cases}$$

POSTO $z = t,\ t \in \mathbb{R}$

$w = \dfrac{2t - 25}{13}$, $y = -4 - w = -\dfrac{2t + 27}{13}$

$$x = -2y + w - z - 2 = \frac{4t + 54}{13} + \frac{2t - 25}{13} - t - 2 = \frac{-7t + 3}{13}$$

20/1/16 D

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA E' QUINDI

$$x = \frac{-7t+3}{13}, \quad y = \frac{-2t-27}{13}, \quad w = \frac{2t-25}{13}, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) LA RETTA a APPARTIENE AL PIANO π PASSANTE PER $P(-1,0,4)$ e $\perp$ $\vec{u} = -\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$

$$(x+1)(-1) + (y-0)\cdot(-5) + (z-4)\cdot 1 = 0$$

$$-x - 5y + z - 5 = 0$$

DETERMINIAMO ORA L'INTERSEZIONE DEL PIANO π CON LA RETTA b RISOLVENDO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-3t \\ z = 2t \\ -x-5y+z-5=0 \end{cases}$$

DA CUI SI HA: $t - 1 - 5(2-3t) + 2t - 5 = 0$

$$18t - 16 = 0 \Rightarrow t = 8/9$$

QUINDI $Q = \pi \cap b = \left(1 - \frac{8}{9}, 2 - 3\cdot\frac{8}{9}, 2\cdot\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

LA RETTA a E' QUINDI LA RETTA PASSANTE PER P, Q:

$$\frac{x+1}{\frac{1}{9}+1} = \frac{y-0}{-\frac{2}{3}-0} = \frac{z-4}{\frac{16}{9}-4}$$

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{-10}.$$

20/1/16 D

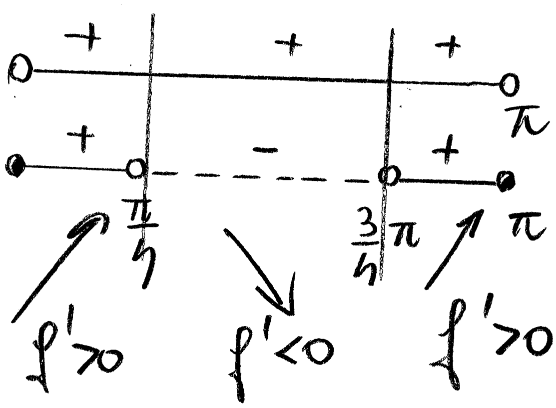
3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+2\cos^2 x}$ E' DEFINITA PER OGNI $x \in [0,\pi]$.

$$f'(x) = \frac{-\sin x\,(1+2\cos^2 x) + \cos x \cdot 4\cos x \sin x}{(1+2\cos^3 x)^2} = \frac{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)}{(1+2\cos^2 x)^2}$$

QUINDI $f'(x) > 0 \iff \sin x\,(2\cos^2 x - 1) > 0$

$\sin x > 0$

$2\cos^2 x - 1 > 0$



$x = 0$ MIN REL.

$x = \frac{\pi}{4}$ MAX REL

$x = \frac{3}{4}\pi$ MIN. REL

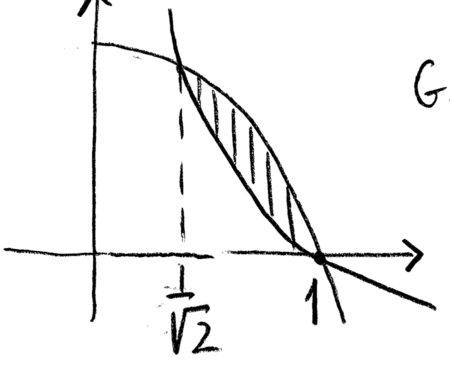
$x = \pi$ MAX. REL.

POICHE' $f(0) = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(\pi) = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{\pi}{4}$ E' MAX ASSOLUTO, $x = \frac{3}{4}\pi$ E' MIN ASSOLUTO.

4) $1 - x^2 = \dfrac{1-x^2}{2x^2}$ $(x>0)$ $\Rightarrow$ $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

$2(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{2}\right) = 0$



GLI ESTREMI DELLA REGIONE SI TROVANO IN $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = 1$

$$A = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(1 - x^2 - \frac{1-x^2}{2x^2}\right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(1 - x^2 - \frac{1-x^2}{2x^2}\right) dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2x}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{3} - \frac{7}{3\sqrt{2}}.$$