A1

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 19/1/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y + w = -2 \\ x + y + 3w = 1 \\ x - 5w = -4 \\ 5x + 3y - w = -5 \\ x + 3y + w = 2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

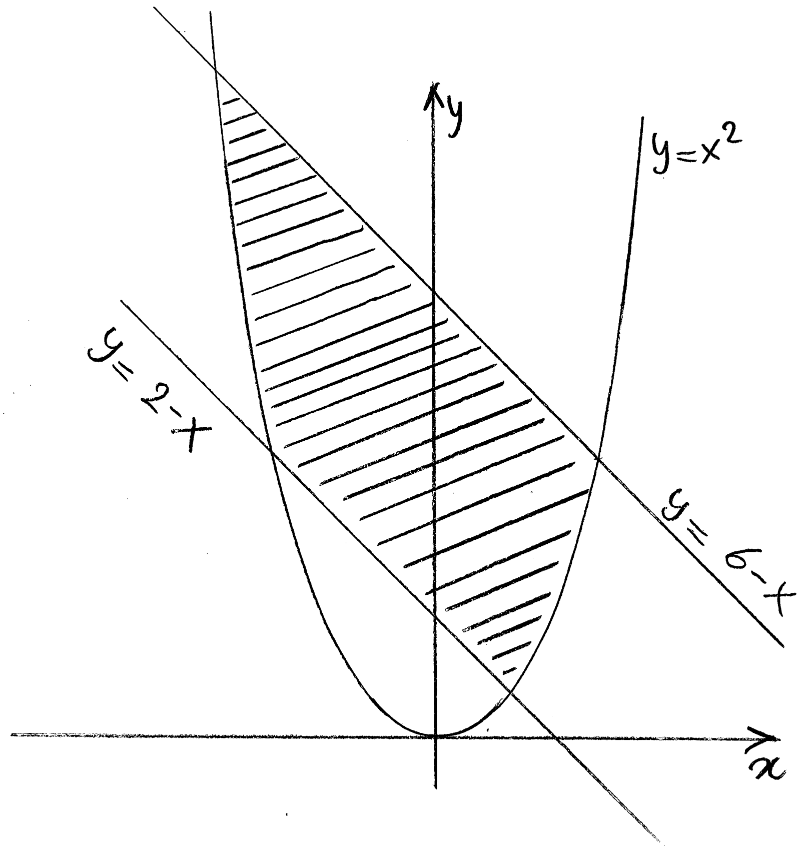
2) Verificare che le rette:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

sono parallele, e trovare l'equazione del piano π che le contiene.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = (1 + 2x)e^{-x^2}$ per $x \in \mathbf{R}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



1) SCAMBIAMO SUBITO 1ª E 2ª RIGA E POI RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_4-5A_1 \\ A_5-A_1}]{\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-A_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & -2 & -16 & -10 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_4-2A_2 \\ A_5+2A_2}]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 \downarrow\uparrow A_5]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3$. IL SISTEMA HA $\infty^{3-3} = \infty^0$ SOLUZIONI, CIOE' UN'UNICA SOLUZIONE. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x + y + 3w = 1 \\ -y - 8w = -5 \\ -18w = -9 \end{cases} \Rightarrow \quad w = \frac{1}{2}, \quad y = 5 - 8w = 1$$

$$x = 1 - y - 3w = -\frac{3}{2}$$

SOL: $\underline{\underline{x = -\frac{3}{2}, \quad y = 1, \quad w = \frac{1}{2}}}$.

2) DETERMINIAMO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI r, s:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad \underline{z = t}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \underline{y = -z - 2x = -3t - 2}$$

$$\underline{x = 1 + z = 1 + t}$$

QUINDI r E' $/\!/ \ \vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$$s: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y - 4z = 3 \end{cases} \qquad \underline{x = t}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \underline{z = (x - y - 3)/4 = t - 3/4}$$

$$\underline{y = -3t}$$

QUINDI ANCHE s E' $/\!/ \ \vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow r /\!/ s$.

POICHE' $r \neq s$ ESISTE UN UNICO PIANO π CHE LE CONTIENE. π E' IL PIANO PASSANTE PER s E PER UN PUNTO P DI r.

IL FASCIO DI PIANI PER A HA EQUAZIONE

$$\lambda(3x+y)+\mu(x-y-4z-3)=0.$$

POSTO $t=0$ NELL'EQUAZIONE PARAMETRICA DI r, TROVIAMO IL PUNTO $P=(1,-2,0)$. QUINDI IL PIANO DEL FASCIO PASSANTE PER P VERIFICA:

$$\lambda(3\cdot 1-2)+\mu(1+2-3)=0 \implies \lambda=0.$$

SCELTO QUINDI $\mu=1$ ABBIAMO L'EQUAZIONE

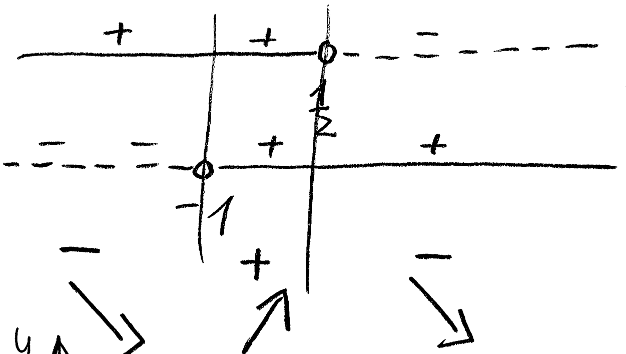
$$\pi: \quad x-y-4z-3=0.$$

3) $$f'(x)=2e^{-x^2}-2x(1+2x)e^{-x^2}$$
$$=2e^{-x^2}\left[1-x-2x^2\right]=4e^{-x^2}\left(\tfrac{1}{2}-x\right)(x+1)$$

$$f'(x)>0 \iff \left(\tfrac{1}{2}-x\right)(x+1)>0$$

$\frac{1}{2}-x>0$

$x+1>0$

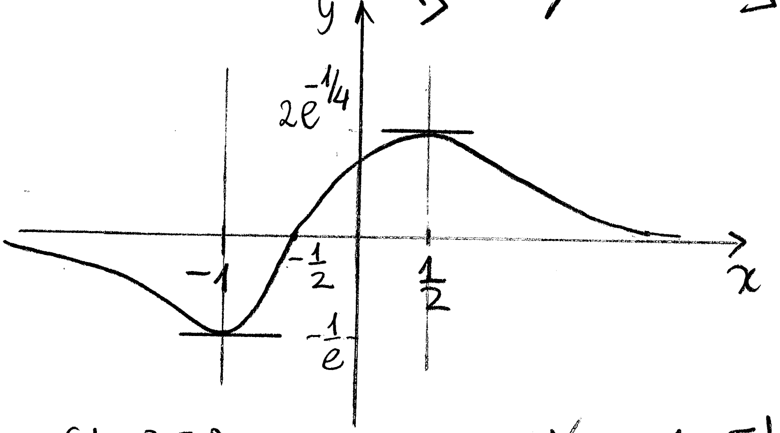


$x=-1$ MIN. REL.

$x=\frac{1}{2}$ MAX. REL.

$f(-1)=-e^{-1}$

$f(\frac{1}{2})=2e^{-1/4}$

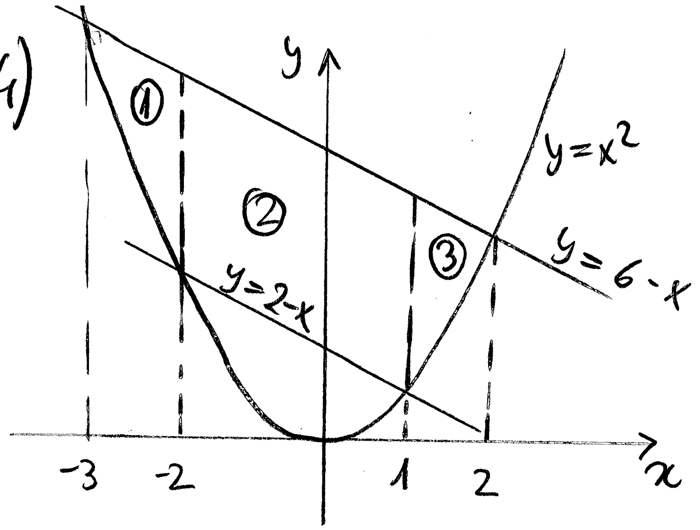


POICHÈ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0,$$

SI DEDUCE CHE $x=-1$ E' MIN. ASSOLUTO, MENTRE $x=\frac{1}{2}$ E' MAX. ASSOLUTO.

4)



A4

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6-x \end{cases} \Rightarrow x = -3, 2$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow x = -2, 1$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-3}^{-2} (6-x-x^2)\,dx + \int_{-2}^{1} 4\,dx + \int_{1}^{2} (6-x-x^2)\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-2} + \left[4x\right]_{-2}^{1} + \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\cancel{-12} - 2 + \cancel{\frac{8}{3}}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right) + \cancel{12} + \left(\cancel{12} - 2 - \cancel{\frac{8}{3}}\right) - \left(6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 11 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{49}{3}.$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 19/1/17 B1

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+2y+w=1 \\ 3x+y+3w=2 \\ 4x+5w=3 \\ x-y+2w=1 \\ 5x+3y+4w=3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

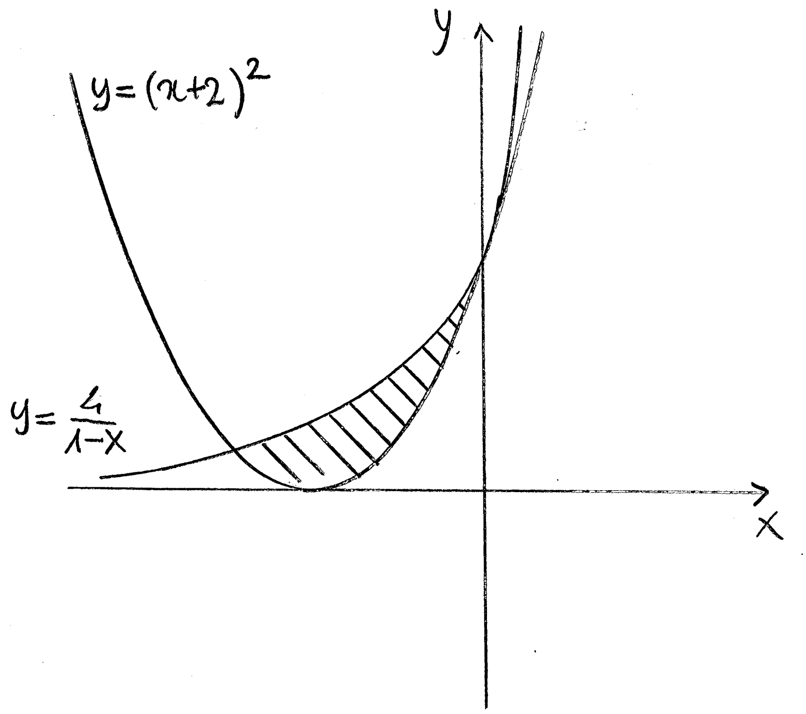
2) Verificare che le rette:

$$r:\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-3z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x+3y=0 \\ y+2z=-1 \end{cases}$$

sono parallele, e trovare l'equazione del piano π che le contiene.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=\dfrac{3\cos x}{1+\sin x}+2x\,,\ x\in[0,\pi]\,.$

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



1) SCAMBIAMO SUBITO LA 1^a RIGA CON LA 4^a E POI RIDUCIAMO A SCALA $\mathcal{B}_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_1,\ A_5-5A_1]{A_2-3A_1,\ A_3-4A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & -6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2,\ A_5-2A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{3-2} = \infty^1$ SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - y + 2w = 1 \\ 4y - 3w = -1 \end{cases}$$

POSTO $w = t$, $t \in \mathbb{R}$, SI HA:

$y = \dfrac{3t-1}{4}$, $x = y - 2w + 1 = \dfrac{3-5t}{4}$

SOLUZIONE: $x = \dfrac{3-5t}{4}$, $y = \dfrac{3t-1}{4}$, $z = t$; $t \in \mathbb{R}$.

2) DETERMINIAMO LE EQUAZIONI DI r, s IN FORMA NORMALE:

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 - z - x \overset{!}{=} 1 - 4z \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-2} = z$$

$$s: \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = -3y \overset{!}{=} 3 + 6z \Rightarrow \frac{x-\frac{3}{2}}{3} = \frac{y+1}{-2} = z$$

QUINDI r, s SONO PARALLELE PERCHE' HANNO GLI STESSI PARAMETRI DIRETTORI. POICHE' $r \neq s$, ESISTE UN SOLO PIANO, π, CHE LE CONTIENE:

CONSIDERIAMO IL FASCIO DI PIANI PER r

$$\lambda(2x+3y)+\mu(y+2z+1)=0,$$

E CERCHIAMO IL PIANO PASSANTE PER IL PUNTO $P=(1,\frac{1}{2},0)\in r$: DOVRA' ESSERE

$\lambda(2+\frac{3}{2})+\mu(\frac{1}{2}+1)=0$, CIOE' $7\lambda+3\mu=0$.

SCELTO $\mu=-7$, RICAVIAMO $\lambda=3$. IL PIANO π HA QUINDI EQUAZIONE:

$$\pi:\quad 6x+2y-14z-7=0.$$

3) $$f'(x)=\frac{-3\sin x(1+\sin x)-3\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}+2, \quad x\in[0,\pi]$$

$$=\frac{-3}{1+\sin x}+2=\frac{2\sin x-1}{1+\sin x}$$

POICHE' $1+\sin x\geq 1$ IN $[0,\pi]$, $f'(x)>0 \iff \sin x-\frac{1}{2}>0$

$\sin x-\frac{1}{2}>0$

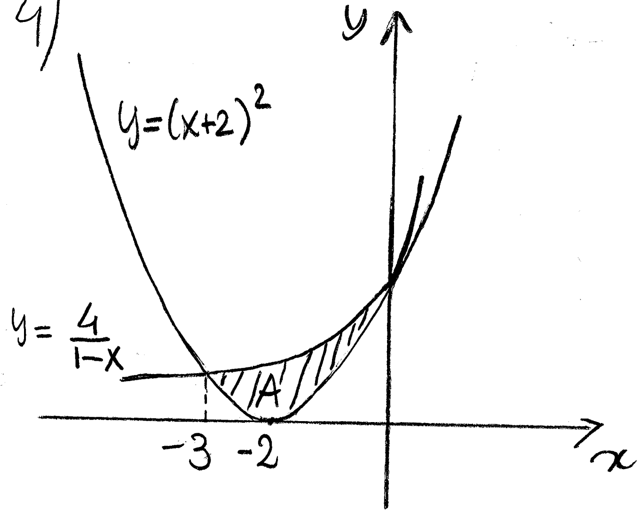
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & \frac{\pi}{6} & & \frac{5}{6}\pi & & \pi \\ & - & & + & & - & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

QUINDI $x=0$, $x=\frac{5}{6}\pi$ MAX. RELATIVI

$x=\frac{\pi}{6}$, $x=\pi$ MIN. RELATIVI

- POICHE' $f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}<f(\pi)=-3+2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$ E' MIN. ASSOLUTO
- POICHE' $f(0)=3<f(\frac{5}{6}\pi)=-\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi$, $x=\frac{5}{6}\pi$ E' MAX. ASSOLUTO.

4)



DETERMINIAMO LE INTERSEZIONI DEI DUE GRAFICI :

$$\begin{cases} y = (x+2)^2 \\ y = \dfrac{4}{1-x} \end{cases} \qquad (x \neq 1)$$

$$\frac{4}{1-x} = (x+2)^2 \iff \cancel{4} = x^2 + \cancel{4x} + \cancel{4} - x^3 - 4x^2 - \cancel{4x}$$

$$\iff x^2(x+3) = 0 \implies \begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}$$

$$A = \int_{-3}^{0} \left[\frac{4}{1-x} - (x+2)^2\right] dx = \left[-4\ln(1-x) - \frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left(-4\cancel{\ln 1} - \frac{8}{3}\right) - \left(-4\ln 4 + \frac{1}{3}\right) = -3 + 8\ln 2 .$$

C1

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 19/1/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

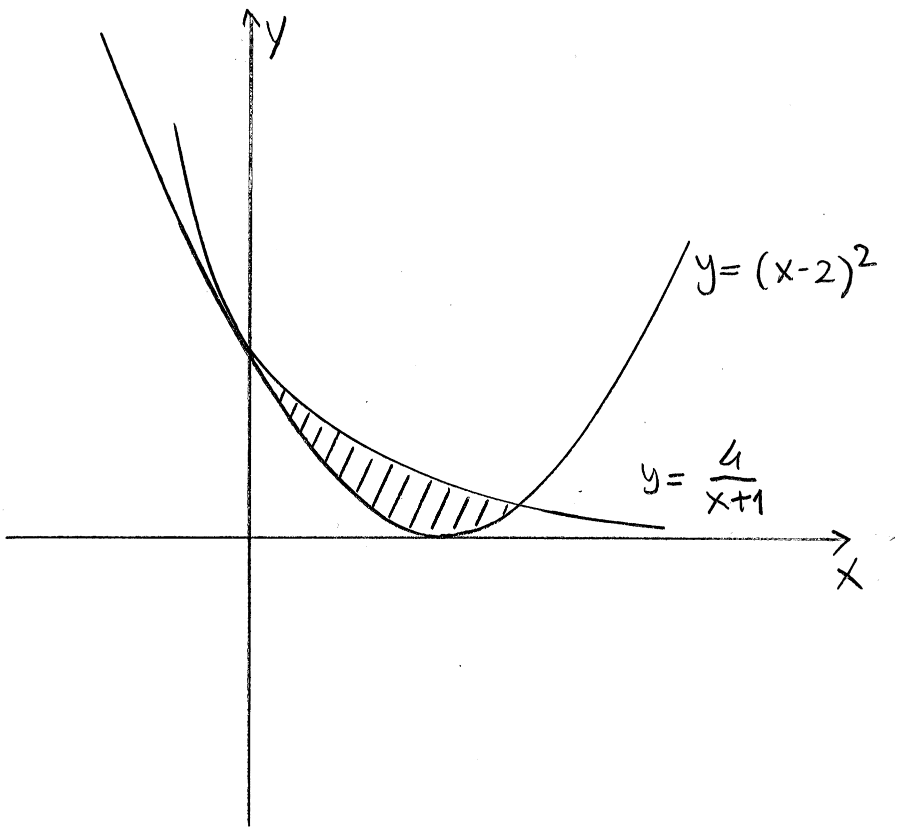
$$\begin{cases} 2x - 4y + 2w - z = 5 \\ x - 3y + 2w - z = 2 \\ -x + 5y - 4w + 2z = -1 \\ 6y - 6w + 4z = 3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la distanza tra la retta r passante per $A(1,3,0)$ e $B(-1,0,1)$ e la retta s passante per $C(4,0,2)$ e parallela alla retta $x-3=\dfrac{y+1}{2}=-z$

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x)=(1-\sin x)^{\sqrt{2}-1}\sin x$ nell'intervallo $[0,\pi/2]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



1) SCAMBIAMO 1^a E 2^a RIGA E RIDUCIAMO A SCALA C_2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+A_1]{A_2-2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-3A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 \uparrow\downarrow A_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI ; RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE :

$$\begin{cases} x - 3y + 2w - z = 2 \\ 2y - 2w + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

POSTO $w = t$, $t \in \mathbb{R}$,

$y = \frac{1}{2} + t$

$x = 2 + 3y - 2w + z = \frac{7}{2} + t$.

SOLUZIONE : $x = \frac{7}{2} + t$, $y = \frac{1}{2} + t$, $w = t$, $z = 0$; $t \in \mathbb{R}$.

2) $r \parallel \vec{v} = \vec{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $s \parallel \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

QUINDI $\operatorname{dist}(r, s) = \dfrac{|\vec{AC} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} =$

$$= \frac{\left|(3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\right|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3) LA FUNZIONE $f(x) = (1-\operatorname{sen}x)^{\sqrt{2}-1}\operatorname{sen}x$

E' DERIVABILE PER $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$$f'(x) = (\sqrt{2}-1)(1-\operatorname{sen}x)^{\sqrt{2}-2}(-\cos x)\operatorname{sen}x + (1-\operatorname{sen}x)^{\sqrt{2}-1}\cos x$$

$$= (1-\operatorname{sen}x)^{\sqrt{2}-2}\cos x\left[(1-\sqrt{2})\operatorname{sen}x + 1-\operatorname{sen}x\right]$$

$$= (1-\operatorname{sen}x)^{\sqrt{2}-2}\cos x\left(1-\sqrt{2}\operatorname{sen}x\right).$$

QUINDI $f'(x) > 0$ in $[0, \pi/2) \iff \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen}x > 0$

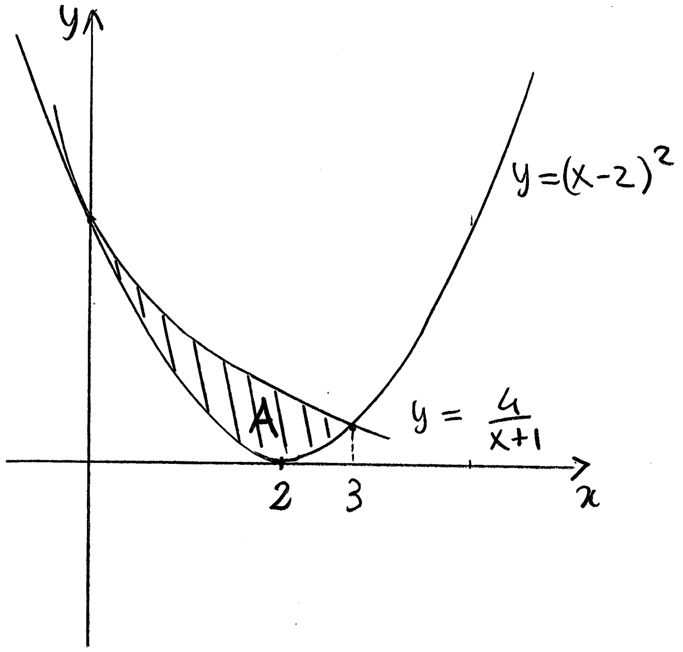
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen}x > 0$

0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
	$+$ $\nearrow$		$-$ $\searrow$	

SEGUE CHE $x = \frac{\pi}{4}$ E' MAX. RELATIVO

$x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ MIN. RELATIVI

- POICHE' IN $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x)$ CAMBIA SEGNO (DA + A −) UNA SOLA VOLTA, SEGUE CHE $x = \frac{\pi}{4}$ E' MAX. ASSOLUTO
- $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies x = 0, \frac{\pi}{2}$ SONO MIN. ASSOLUTI.



DETERMINIAMO LE INTERSEZIONI DEI DUE GRAFICI

$$\begin{cases} y=(x-2)^2 \\ y=\dfrac{4}{x+1} \end{cases} \qquad (x\neq -1)$$

$$\cancel{4} = (x+1)(x-2)^2 = x^3-4x^2+\cancel{4x}+x^2-\cancel{4x}+\cancel{4}$$

$$x^3-3x^2 = x^2(x-3)=0 \implies x=0,\ x=3$$

$$A=\int_0^3\left(\frac{4}{x+1}-(x-2)^2\right)dx = \left[4\ln(x+1)-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^3$$

$$=\left(4\ln 4-\frac{1}{3}\right)-\left(4\cancel{\ln 1}+\frac{8}{3}\right) = 8\ln 2-3.$$

D1

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria

19/1/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

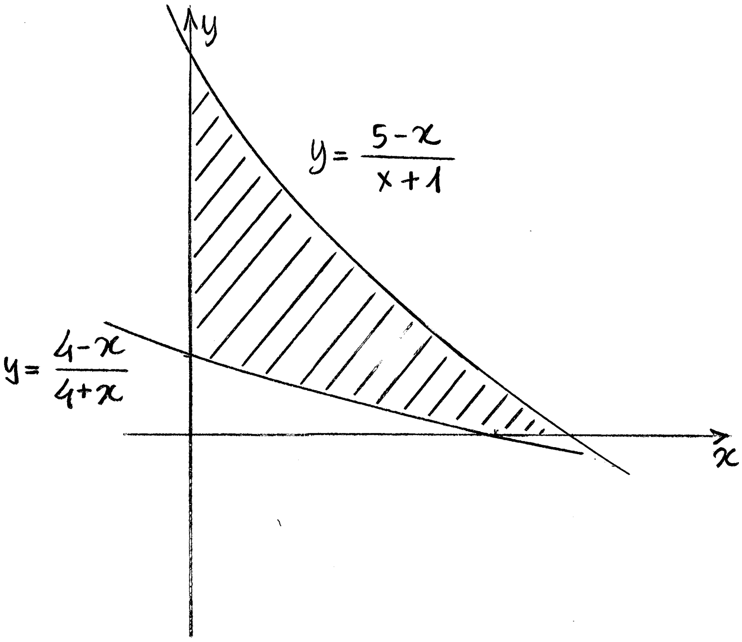
$$\begin{cases} x + 2y + 2w - z = 0 \\ 3x - y + w + z = 1 \\ x + 4y - w + z = 2 \\ 2x - 5y + 2w = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r passante per il punto $P = (-2, 0, 3)$ e tale da essere complanare ed ortogonale alla retta $t : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{4} = z.$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = (x^2 - 3)\, e^{-x^2}$ per $x \in \mathbf{R}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_1]{\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+4A_3]{A_2+3A_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -14 & 10 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 10 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3+2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -14 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -31 & 22 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

QUINDI $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3$. IL SISTEMA HA $\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x+2y+2w-z=0 \\ -y-14w+10z=7 \\ -31w+22z=16 \end{cases}$$

POSTO $w=t$, $t\in\mathbb{R}$

$$z = \frac{16+31t}{22}$$

$$y = 10z-14w-7 = \frac{160+310t}{22} - 14t - 7 = \frac{3+t}{11}$$

$$x = z-2y-2w = \frac{16+31t}{22} - \frac{6+2t}{11} - 2t = \frac{4-17t}{22}$$

SOLUZIONE: $x = \dfrac{4-17t}{22}$, $y = \dfrac{3+t}{11}$, $w=t$, $z = \dfrac{16+31t}{22}$.

2) POICHE' $t \parallel \vec{v} = 2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$, IL PIANO π PASSANTE PER $P=(-2,0,3)$ E $\perp t$ HA EQUAZIONE

$$\pi: \quad 2(x+2)+4y+z-3=0.$$

LA RETTA CERCATA E' ALLORA LA RETTA PASSANTE PER

$P = (-2, 0, 3)$ E PER $Q = t \cap \pi$.

DETERMINIAMO QUINDI L'INTERSEZIONE:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z + 1 = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{4} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 4z + 2 \end{cases}$$

$$2(2z) + 4(4z+2) + z + 1 = 0$$

$$21z + 9 = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{7}, \quad x = -\frac{6}{7}, \quad y = \frac{2}{7}$$

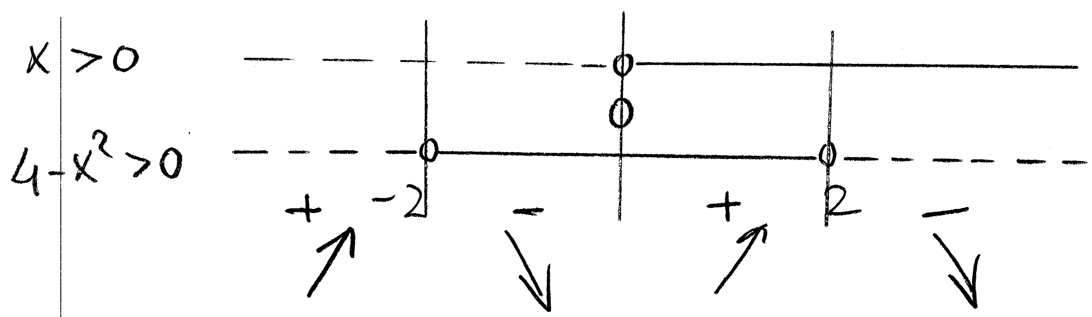
$\Rightarrow \quad Q = \left(-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right)$. LA RETTA r HA EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{8}{7}s \\ y = \frac{2}{7}s \\ z = 3 - \frac{24}{7}s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

---

3) $f'(x) = 2x\, e^{-x^2} - 2x(x^2-3)\, e^{-x^2} = 2x(4-x^2)\, e^{-x^2}$

QUINDI $f' > 0 \iff x(4-x^2) > 0$



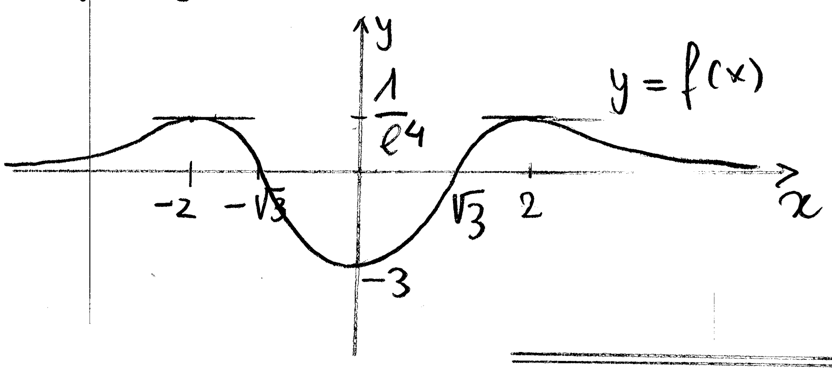
$f(\pm 2) = \frac{1}{e^4}$

$f(0) = -3$

$x = \pm 2$ MAX REL.

$x = 0$ MIN REL.

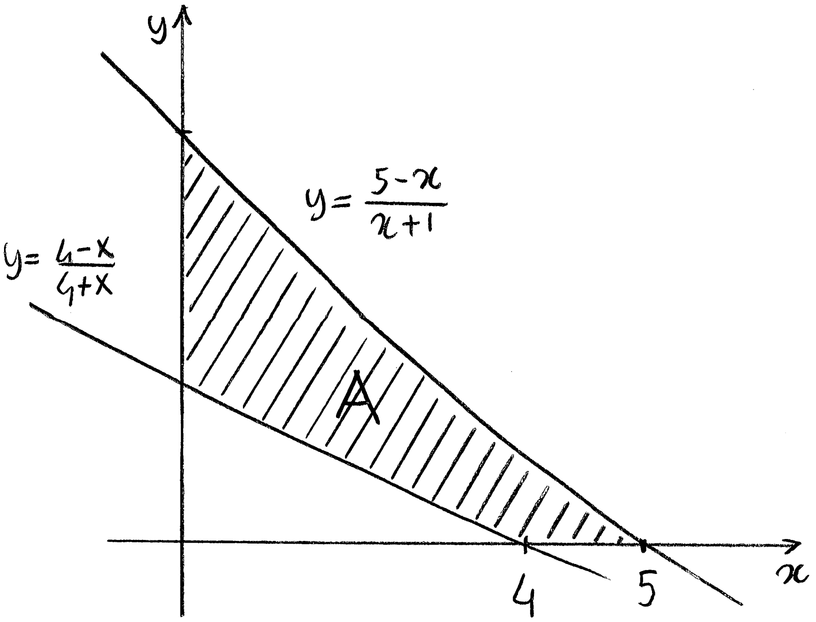
POICHE' $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$



$x = 0$ E' MIN ASSOLUTO

$x = \pm 2$ MAX. ASSOLUTI.

D4



$$\frac{5-x}{x+1} = \frac{6}{x+1} - 1$$

$$\frac{4-x}{4+x} = \frac{8}{4+x} - 1$$

$$A = \int_0^5 \frac{5-x}{x+1}\,dx - \int_0^4 \frac{4-x}{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{6}{x+1} - 1\right) dx - \int_0^4 \left(\frac{8}{4+x} - 1\right) dx$$

$$= \Big[6\ln(x+1) - x\Big]_0^5 - \Big[8\ln(4+x) - x\Big]_0^4$$

$$= 6\ln 6 - 5 - 8\ln 8 + 4 + 8\ln 4$$

$$= 6\ln 6 - 8\ln 2 - 1.$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 19/1/17 E1

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

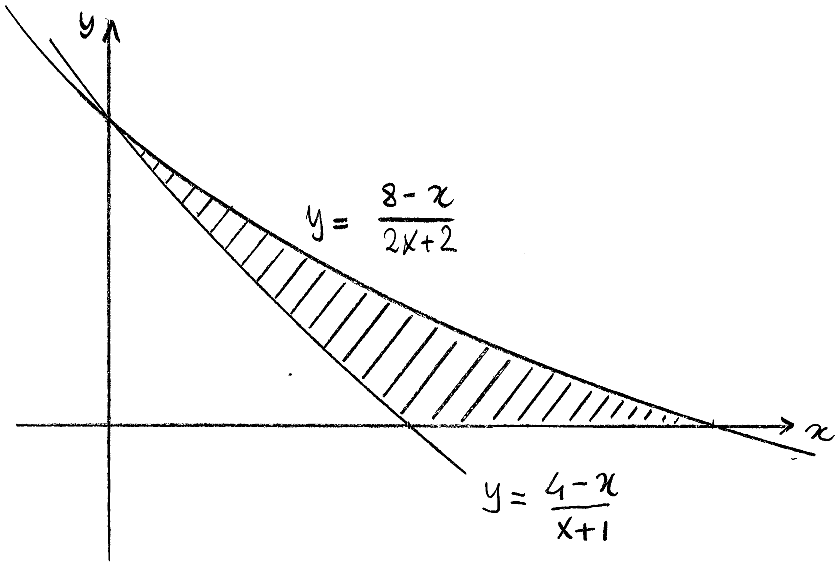
$$\begin{cases} 3x - y + w + 4z = -3 \\ -2x + 2y + w - 2z = 1 \\ x + y + 2w + 2z = -2 \\ 4y + 5w + 2z = -3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la distanza tra la retta s passante per $A(1,-1,0)$ e $B(2,0,3)$ e la retta t passante per $C(0,0,2)$ e perpendicolare al piano π: $x + 3y - 3z = 5$.

3) Determinare campo di esistenza, massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = x\,e^{1/\ln x}$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



E 2

1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 3ª E RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3-3A_1]{A_2+2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3+A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 2$, IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE :

$$\begin{cases} x+y+2w+2z=-2 \\ 4y+5w+2z=-3 \end{cases}$$

POSTO $w=s$, $z=t$ $(s,t\in\mathbb{R})$

$$y = -\frac{3+5s+2t}{4}$$

$$x = -2-y-2w-2z = -2+\frac{3+5s+2t}{4}-2s-2t = -\frac{5+3s+6t}{4}.$$

SOLUZIONE: $x = -\dfrac{5+3s+6t}{4}$, $y = -\dfrac{3+5s+2t}{4}$, $w=s$, $z=t$.

2) LA RETTA s E' // AL VETTORE

$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}.$$

LA RETTA t E' $\perp$ AL PIANO π: $x+3y-3z=5$, QUINDI $t \parallel \vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}.$$

LA DISTANZA FRA s E t E' ALLORA DATA DA

$$\mathrm{dist}(s,t) = \frac{|\vec{AC} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

$$= \frac{|(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-12\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})|}{\sqrt{12^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{22}{\sqrt{184}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{46}}.$$

---

3) $f(x) = x\, e^{1/\ln x}$ E' DEFINITA PER $x > 0$, $x \neq 1$.

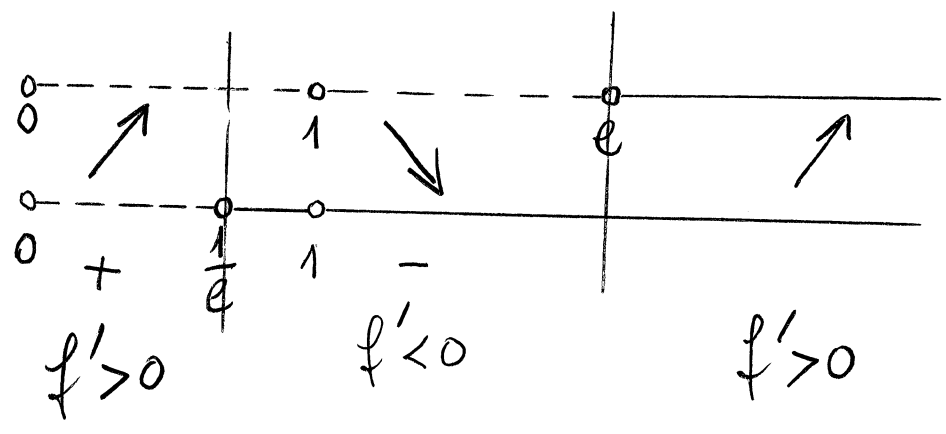
$$f'(x) = e^{1/\ln x} + x\, e^{1/\ln x} \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{e^{1/\ln x}}{(\ln x)^2} \left(\ln^2 x - 1\right)$$

QUINDI PER $x > 0$, $x \neq 1$

$$f'(x) > 0 \iff \ln^2(x) - 1 > 0$$

$\ln x - 1 > 0$

$\ln x + 1 > 0$



E4

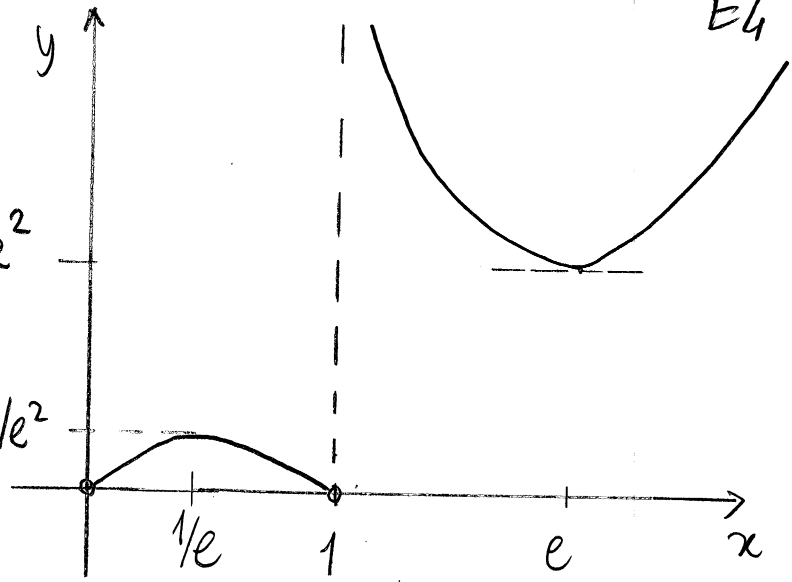
$x = \frac{1}{e}$ MAX. REL.

$x = e$ MIN. REL.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}, \; f(e) = e^2$

$\lim_{x \to +\infty, 1^+} f(x) = +\infty$

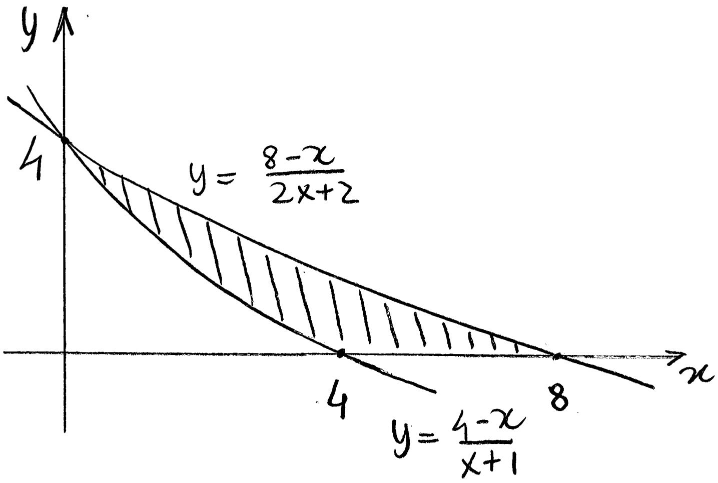
$\lim_{x \to 0^+, 1^-} f(x) = 0^+$



QUINDI $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ NON SONO ESTREMI ASSOLUTI

---

4)



$$\frac{8-x}{x+1} = \frac{9}{x+1} - 1$$

$$\frac{4-x}{x+1} = \frac{5}{x+1} - 1$$

$$A = \int_0^8 \frac{8-x}{2x+2}\,dx - \int_0^4 \frac{4-x}{x+1} = \frac{1}{2}\int_0^8 \left(\frac{9}{x+1} - 1\right)dx - \int_0^4 \left(\frac{5}{x+1} - 1\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[9\ln(x+1) - x\right]_0^8 - \left[5\ln(x+1) - x\right]_0^4$$

$$= \frac{9}{2}\ln 9 - 5\ln 5 .$$

F1

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 19/1/17

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

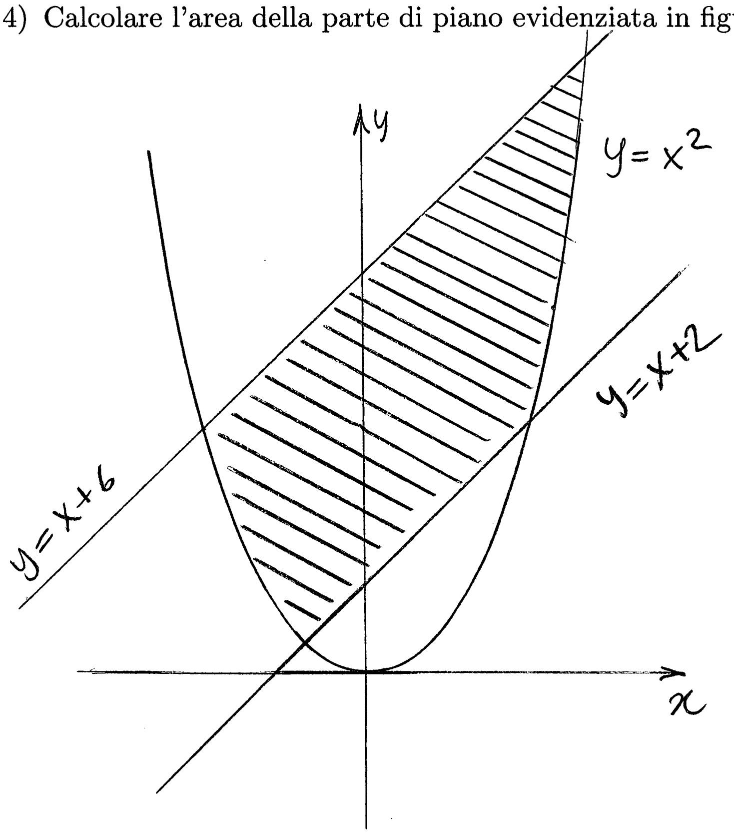
$$\begin{cases} 4x - y + w - z = 1 \\ 3x + y + 2w + z = -1 \\ 2x + 3y + 3w + 3z = -3 \\ -7y - 5w - 7z = 7 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare la retta r passante per il punto $P = (1,2,0)$ e tale da essere complanare ed ortogonale alla retta $t:\ x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = -z$.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x) = \dfrac{3\sin x}{1+\cos x} - 2x$ per $x \in [0,\pi)$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



F2

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & -7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_1-A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_3+A_1]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4+A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 2 \Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - 2y - w - 2z = 2 \\ 7y + 5w + 7z = -7 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$; $s, t \in \mathbb{R}$

$$y = -1 - \frac{5}{7}s - t$$

$$x = 2y + w + 2z + 2 = -\cancel{2} - \frac{10}{7}s - \cancel{2t} + s + \cancel{2t} + \cancel{2} = -\frac{3}{7}s.$$

SOLUZIONE: $x = -\frac{3}{7}s,\ y = -1 - \frac{5}{7}s - t,\ w = s,\ z = t.$

2) $t \parallel \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. DETERMINIAMO IL PIANO π PASSANTE PER $P(1,2,0)$ E $\perp \vec{v}$:

$$\pi: \quad 1\cdot(x-1) + 2(y-2) - 1z = 0$$

$$x + 2y - z - 5 = 0.$$

LA RETTA r E' QUINDI LA RETTA PASSANTE PER $P(1,2,0)$ E PER $Q = \pi \cap t$:

F3

$$\begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ x-3 = \dfrac{y+1}{2} = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ x = 3-z \\ y = -2z-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3-z+2(-2z-1)-z-5=0$$

$$-6z-4=0 \quad \Rightarrow \quad z=-\frac{2}{3}$$

QUINDI $Q=\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ E r HA EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = 1+\frac{8}{3}s \\ y = 2-\frac{5}{3}s \\ z = -\frac{2}{3}s \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R}.$$

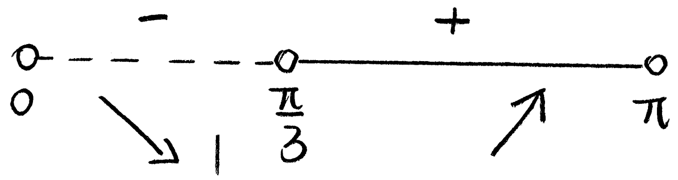
3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE PER $x\neq \pi+2k\pi$.

$$f'(x) = 3\,\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}-2$$

$$= 3\,\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}-2 = \frac{1-2\cos x}{1+\cos x} \qquad x\neq\pi+2k\pi$$

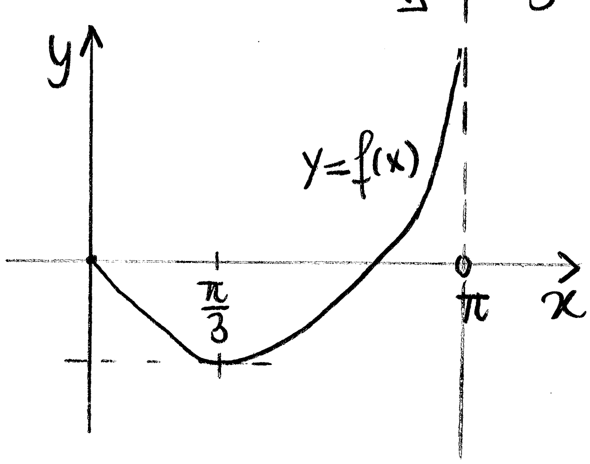
QUINDI IN $[0,\pi)$ ABBIAMO $f'(x)>0 \iff 1-2\cos x>0$

$\cos x<\frac{1}{2}$



$X=0$ MAX. REL.

$X=\frac{\pi}{3}$ MIN. REL.



$f(0)=0,$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi.$

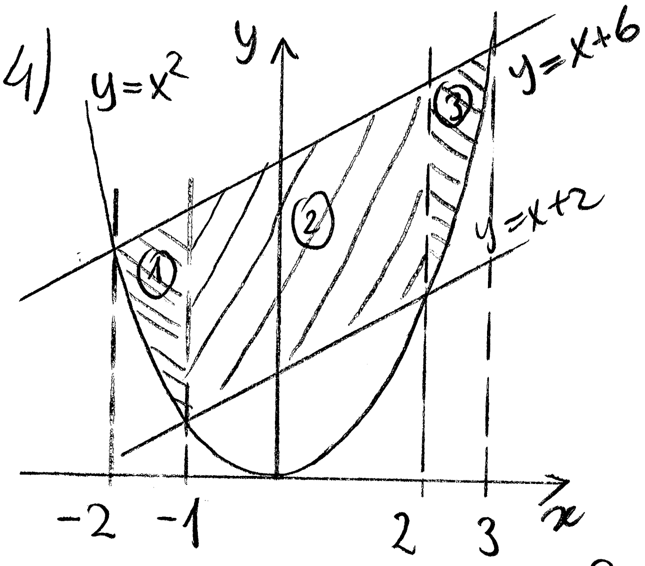
$X = \frac{\pi}{3}$ E' MIN. ASSOLUTO PERCHÈ $f'(x)$ CAMBIA SEGNO UNA SOLA VOLTA IN $\frac{\pi}{3}$.

$X = 0$ NON E' MAX ASSOLUTO PERCHÈ

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\pi - x)}{1 + \cos(\pi - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = +\infty.$$

4)



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow X = -2,\ X = 3$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow X = -1,\ X = 2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 :$$

$$A = \int_{-2}^{1} (x + 6 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{2} (x + 6 - x - 2)\,dx + \int_{2}^{3} (x + 6 - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[4x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 6 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3}\right) + 12 + \left(\frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3}\right)$$

$$- \left(\frac{4}{2} + 12 - \frac{8}{3}\right) = \frac{13}{6} + 12 + \frac{13}{6} = \frac{49}{3}.$$