nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

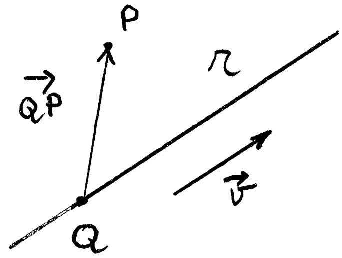
A

1) Determinare la distanza del punto $P = (-1, 0, 3)$ dalla retta di equazioni $\frac{x-2}{3} = y + 1$, $z = 4$.

2) Determinare il massimo assoluto della funzione $f(x) = x + \ln(\cos x)$ nell'intervallo $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}\, dx$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$ nel punto di ascissa $x = 2$.



1) Sia r la retta data. r è parallela al vettore

$$\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$$

Fissato (ad esempio) $x = 2$, troviamo il punto $Q = (2, -1, 4)$.

Quindi $\vec{QP} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,

$$\vec{QP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\mathrm{dist}(P, r) = \frac{\| \vec{QP} \wedge \vec{v} \|}{\| \vec{v} \|} = \frac{\sqrt{1+9+36}}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{5}}.$$

2) $f'(x) = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \operatorname{tg} x$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, abbiamo: $f'(x) > 0 \iff \operatorname{tg} x < 1$

$\iff 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$. Segue quindi che

$f'(x) > 0$ in $[0, \frac{\pi}{4})$, $f'(x) < 0$ in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ ha massimo assoluto in $[0, \frac{\pi}{2})$ nel punto $x = \frac{\pi}{4}$; $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

A

1) Determinare la distanza del punto $P = (-1, 0, 3)$ dalla retta di equazioni $\frac{x-2}{3} = y + 1\,,\ z = 4$.

2) Determinare il massimo assoluto della funzione $f(x) = x + \ln(\cos x)$ nell'intervallo $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}\, dx$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$ nel punto di ascissa $x = 2$.

3) $$\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^\pi (1-\sin x)\,dx = \Big[x + \cos x\Big]_0^\pi$$

$$= (\pi + \cos\pi) - (0 + \cos 0) = \pi - 2$$

4) $$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}\,, \qquad f(2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$f'(x) = 2\frac{d}{dx}(x+3)^{-1/2} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x+3)^{-\frac{3}{2}} = -(x+3)^{-\frac{3}{2}}\,,$$

$$f'(2) = -\frac{1}{5\sqrt{5}}\,.$$

Scriviamo ora l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x=2$:

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}}(x-2) = \frac{12-x}{5\sqrt{5}}$$

$$x + 5\sqrt{5}\,y - 12 = 0\,.$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

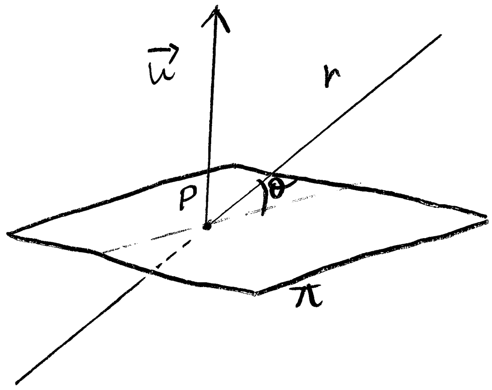
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

B

1) Determinare l'angolo acuto formato dal piano $\pi: x - z + 8 = 0$ con la retta r di equazioni $x - y = 1$, $x + y + z - 4 = 0$.
2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = \arctan(2x) - x$.
3) Trovare l'area della regione di piano limitata dai grafici delle parabole $y = x^2 + 2x$ e $y = 2x^2 + 3x - 6$.
4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = 2e^x - e^{3x}$ nel punto di ascissa $x = 0$.

1) La retta r ha direzione data da

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$



Il piano π è $\perp$ al vettore

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$$

Segue che

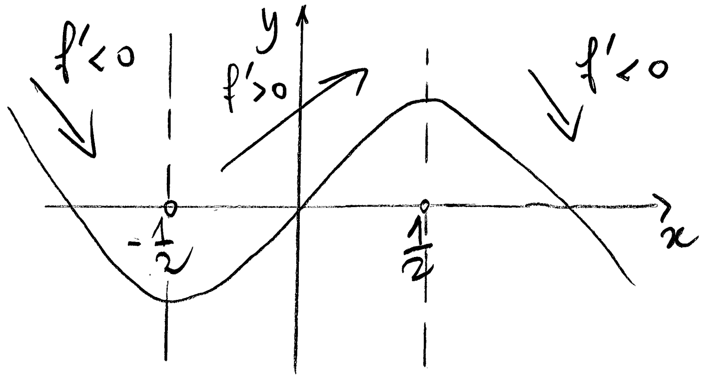
$$\sin\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{|-3|}{\sqrt{1+1}\,\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi $\theta = \frac{\pi}{3}$

2) $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2} - 1 = \dfrac{1-4x^2}{1+4x^2}$. Segue che

$f'(x) > 0 \iff 4x^2 < 1 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$f'(x) < 0 \iff 4x^2 > 1 \iff x < -\frac{1}{2}$ o $x > \frac{1}{2}$



$x = -\frac{1}{2}$ min relativo,

$x = \frac{1}{2}$ max relativo.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

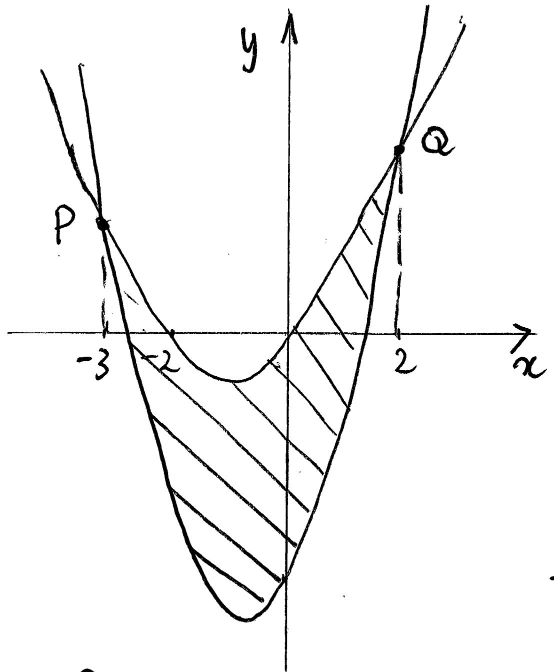
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

B

1) Determinare l'angolo acuto formato dal piano $\pi : x - z + 8 = 0$ con la retta r di equazioni $x - y = 1$, $x + y + z - 4 = 0$.
2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = \arctan(2x) - x$.
3) Trovare l'area della regione di piano limitata dai grafici delle parabole $y = x^2 + 2x$ e $y = 2x^2 + 3x - 6$.
4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = 2e^x - e^{3x}$ nel punto di ascissa $x = 0$.

3)



Determiniamo le ascisse delle intersezioni P, Q delle due parabole:

$$x^2 + 2x = 2x^2 + 3x - 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \,, \quad x = 2$$

$$A = \int_{-3}^{2} \left[(x^2 - 2x) - (2x^2 + 3x - 6) \right] dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^{2} = \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 \right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 \right)$$

$$= \frac{125}{6}.$$

4) $f(x) = 2e^x - e^{3x}$; $f(0) = 2 - 1 = 1$

$f'(x) = 2e^x - 3e^{3x}$; $f'(0) = 2 - 3 = -1$

La retta tangente nel punto di ascissa $x = 0$ è data da

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$= 1 - x$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

C

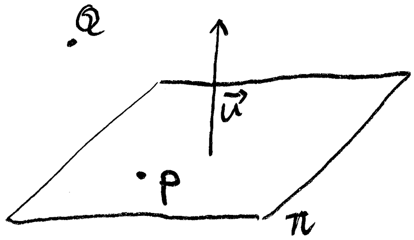
1) Trovare la distanza del punto $Q = (3,1,0)$ dal piano di equazioni parametriche $x = 4 - 2s + t,\ y = s - t,\ z = 5 + 3s + t$ con $s, t \in \mathbf{R}$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) = \arcsin x - 2x$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

3) Calcolare l'area limitata dai grafici dalle parabole $y = 9x - 2x^2$ e $y = x^2 - 3x$.

4) Determinare l'equazione della retta r tangente alla parabola $y = x^2$ e perpendicolare alla retta $x + 6y + 5 = 0$.

1) Il piano π, dato dalle equazioni parametriche, passa per $P = (4,0,5)$ ed è $\perp$ al vettore $\vec{u}$ dato da



$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$$

$$\pi : \quad 4(x-4) + 5y + z - 5 = 0$$
$$4x + 5y + z - 21 = 0$$

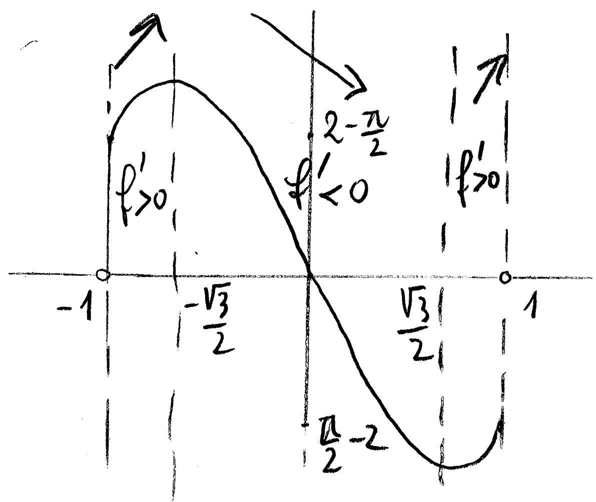
$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 21|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{42}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2$ per $-1 < x < 1$. Dunque

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2} \\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - x^2 < \frac{1}{4} \\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 > \frac{3}{4} \\ |x| < 1 \end{cases} \iff -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad +\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$$



Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13 C

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Trovare la distanza del punto $Q = (3,1,0)$ dal piano di equazioni parametriche $x = 4 - 2s + t,\ y = s - t,\ z = 5 + 3s + t$ con $s, t \in \mathbf{R}$.

2) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) = \arcsin x - 2x$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

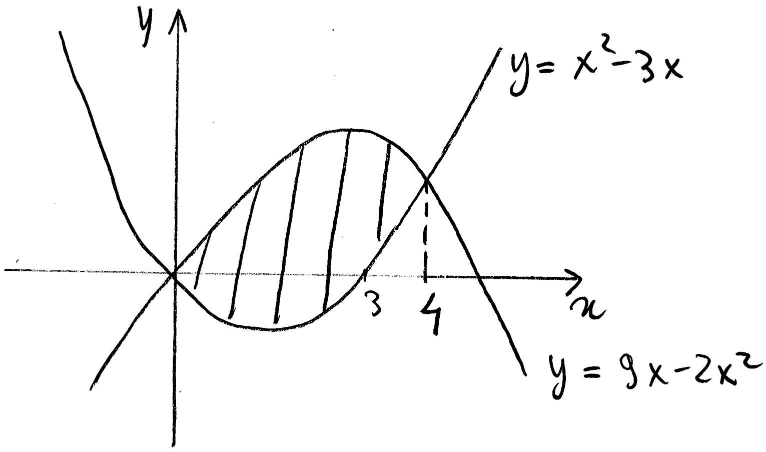
3) Calcolare l'area limitata dai grafici dalle parabole $y = 9x - 2x^2$ e $y = x^2 - 3x$.

4) Determinare l'equazione della retta r tangente alla parabola $y = x^2$ e perpendicolare alla retta $x + 6y + 5 = 0$.

segue che $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ è max assoluto

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ è min assoluto

3)



$9x - 2x^2 = x^2 - 3x$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x-4) = 0$

$$A = \int_0^4 [(9x - 2x^2) - (x^2 - 3x)]\, dx = \int_0^4 (12x - 3x^2)\, dx$$

$$= [6x^2 - x^3]_0^4 = 32.$$

4) $x + 6y + 5 = 0$ ha coeff ang. $m = -\frac{1}{6}$;

cerchiamo quindi la tangente di coeff. ang. $m' = 6$

$m' = f'(x) = 2x$

$6 = 2x \Rightarrow x = 3$

retta tangente $y = 9 + 6(x-3)$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Trovare il punto simmetrico di $Q = (-2, 1, 5)$ rispetto al piano π di equazione $x - 3y + z + 4 = 0$.

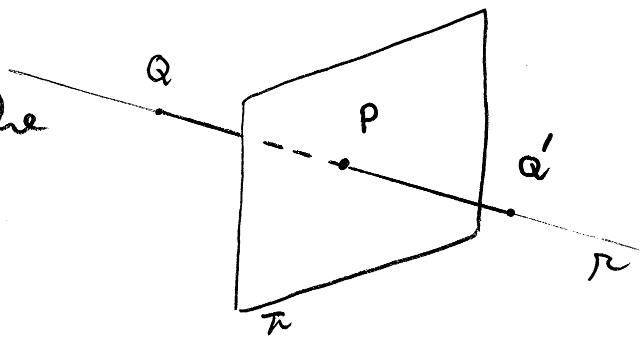
2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = e^x(x^2 - 8)$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\frac{1}{4}} (4x+1)^4 dx$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{3}$.

D

1) La retta r per Q e $\perp$ al piano π ha eq. parametriche



$$(*)\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Determiniamo $P = \pi \cap r$ sostituendo le relazioni $(*)$ nell'equazione di π: $x - 3y + z + 4 = 0$.

$$(-2+t) - 3(1-3t) + 5 + t + 4 = 0$$

$$11t + 4 = 0$$

$$t = -\frac{4}{11}$$

Segue che $P = \left(-2 - \frac{4}{11}, 1 - 3\left(-\frac{4}{11}\right), 5 - \frac{4}{11}\right) = \left(-\frac{26}{11}, \frac{23}{11}, \frac{51}{11}\right)$.

Infine

$$Q' = P + \overrightarrow{QP} = P + P - Q = 2P - Q$$

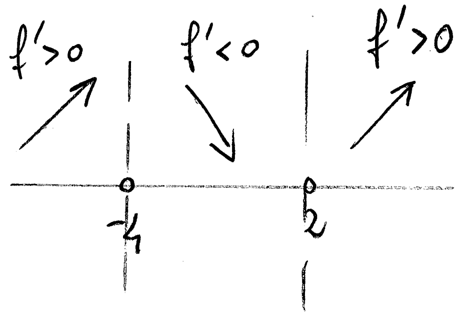
$$= \left(-\frac{30}{11}, \frac{35}{11}, \frac{47}{11}\right)$$

2) $f'(x) = e^x(x^2-8) + e^x(2x) = e^x(x^2+2x-8)$

$$= e^x(x+4)(x-2)$$

segue che $f'(x) > 0$ per $x < -4$ e $x > 2$

$f'(x) < 0$ per $-4 < x < 2$



Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Trovare il punto simmetrico di $Q = (-2, 1, 5)$ rispetto al piano π di equazione $x - 3y + z + 4 = 0$.

2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = e^x(x^2 - 8)$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\frac{1}{4}} (4x+1)^4 dx$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{3}$.

D

Quindi $x = -4$ è max relativo

$x = 2$ è minimo relativo

3) $\int_0^{1/4} (4x+1)^4 dx = \frac{1}{20}(4x+1)^5\Big|_0^{1/4} = \frac{1}{20}(2^5 - 1) = \frac{31}{20}$

4) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}$

La retta tangente ha equazione $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

E

1) Determinare la retta passante per $P = (0, 3, -1)$ e parallela ai piani $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ e $\pi' : x - 2y - z - 3 = 0$.

2) Determinare i massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = \cot x$ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$.

1) $\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ è $\perp$ a π

$\vec{u}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ è $\perp$ a π'

La retta cercata è parallela a $\vec{u} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

Dovendo passare per $P = (0, 3, -1)$, r ha equazioni

$$\begin{cases} x = -5t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \qquad \frac{x}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$$

(parametrica) (forma normale)

2) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

Fattorizziamo $f'(x)$ risolvendo l'equazione biquadratica $5x^4 - 18x^2 - 8 = 0$

Posto $t = x^2$, abbiamo

$$5t^2 - 18t - 8 = 0$$

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8}}{10} = \frac{18 \pm 22}{10} \begin{cases} = 4 \\ = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare la retta passante per $P = (0, 3, -1)$ e parallela ai piani $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ e $\pi' : x - 2y - z - 3 = 0$.

2) Determinare i massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$.

3) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

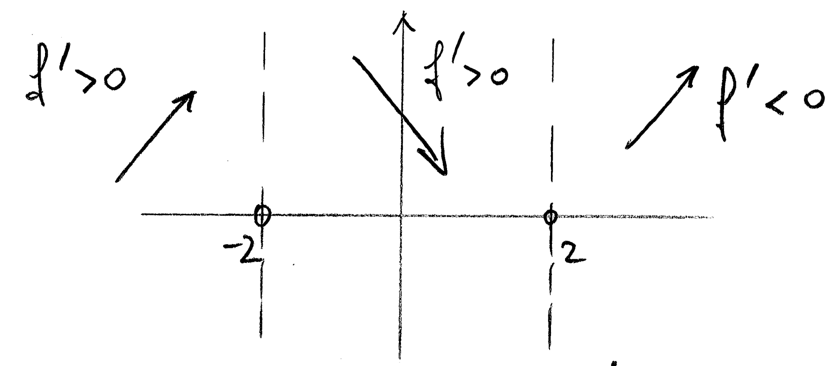
4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = \cot x$ nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$.

E

Segue che

$$5x^4 - 18x^2 - 8 = (x^2 - 4)(5x^2 + 2)$$

Quindi $f'(x) > 0 \iff x^2 - 4 > 0 \iff |x| > 2$



$x = -2$ minimo relativo

$x = 2$ massimo relativo.

3) $$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^3 = 2(2-1) = 2$$

4) $f(x) = \cot g(x)$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4$

$$y = f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} - 4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -4x + \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$$

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

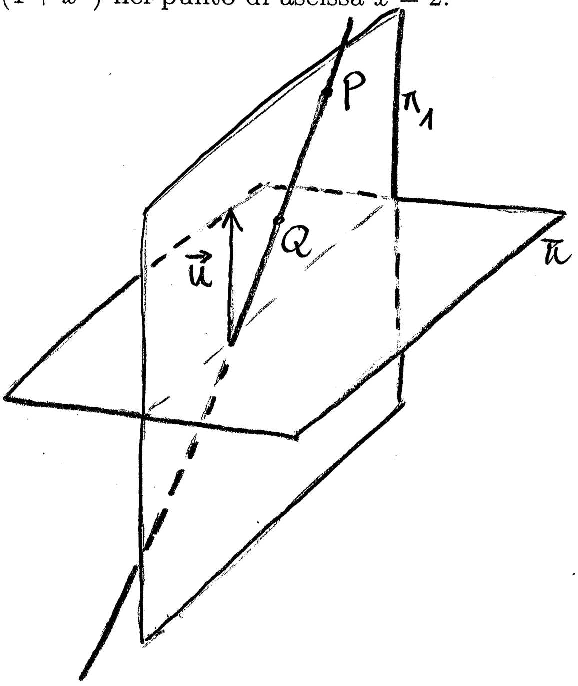
Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $P(3,-1,1)$ e $Q(1,2,-1)$ e perpendicolare al piano di equazioni parametriche: $x = 1 + s + t,\ y = -2s + t,\ z = 3s + t$ con $s, t \in \mathbf{R}$.

2) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+3x^2}$.

3) Calcolare l'area compresa fra la parabola $y = -x^2 + 5x + 3$ e la retta $y = 2x - 1$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = \ln(1 + x^2)$ nel punto di ascissa $x = 2$.



1) Il piano richiesto, π_1, è parallelo al vettore $\overrightarrow{QP} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ e al vettore

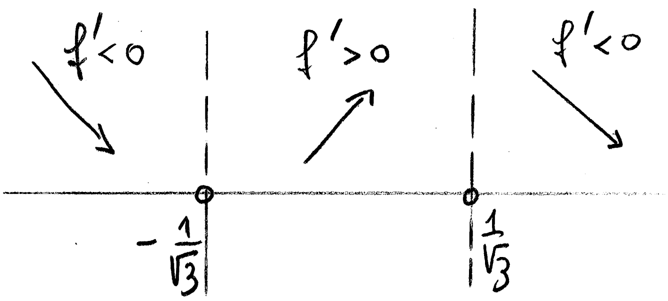
$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

perpendicolare al piano π, dato in forma parametrica.
Dovendo passare per Q, π_1 avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - 5t \\ y = 2 - 3s + 2t \\ z = -1 + 2s + 3t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} \ ; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(eq. cartesiana)

2) $$f'(x) = \frac{1 + 3x^2 - x \cdot 6x}{(1+3x^2)^2} = \frac{1 - 3x^2}{(1+3x^2)^2}$$



quindi $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è min rel.
$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è max. rel.

Poiché $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è anche min assoluto e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è anche max assoluto.

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 11/1/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

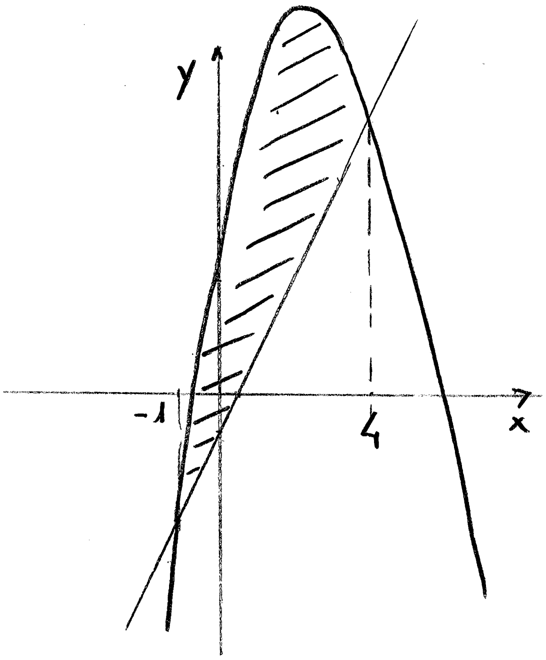
1) Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $P(3,-1,1)$ e $Q(1,2,-1)$ e perpendicolare al piano di equazioni parametriche: $x = 1+s+t$, $y = -2s+t$, $z = 3s+t$ con $s, t \in \mathbf{R}$.

2) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+3x^2}$.

3) Calcolare l'area compresa fra la parabola $y = -x^2+5x+3$ e la retta $y = 2x-1$.

4) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = \ln(1+x^2)$ nel punto di ascissa $x = 2$.

3)



Intersezioni fra retta e parabola

$$-x^2+5x+3 = 2x-1$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$x=-1$$

$$x=4$$

$$A = \int_{-1}^{4} \left[(-x^2+5x+3)-(2x-1)\right]dx = \int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4} = \left(-\frac{64}{3}+\frac{3}{2}\cdot 16+16\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right) \overset{!}{=} \frac{125}{6}$$

4) $f(x) = \ln(1+x^2)$, $f(2) = \ln 5$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad f'(2) = \frac{4}{5}$$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \overset{!}{=} \ln 5 + \frac{4}{5}(x-2)$$