A1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria 18/1/18

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+w-z=2 \\ x-2y+w-3z=-1 \\ 3x+3y+w+z=3 \\ x-y-w=2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{w}=2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su un generico piano π parallelo a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=\cos x(1-\cos x)^{\sqrt{2}-1}$ nell'intevallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA/INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_1]{\substack{A_2-A_1 \\ A_3-3A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[4A_4-3A_2]{4A_3-3A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A)=\operatorname{car}(A|B)=4$
IL SISTEMA HA $\infty^{4-4}=\infty^0=1$ SOLUZIONE

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x+2y+w-z=2 \\ -4y-2z=-3 \\ -8w+22z=-3 \\ -12z=12 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{12}{-12}=-1 \;;\; w=\frac{3+22z}{8}=-\frac{19}{8}$$

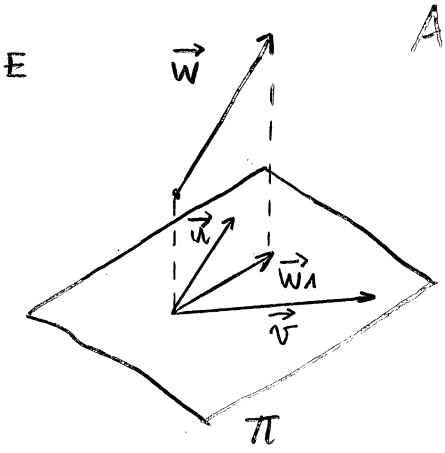
$$y=\frac{3-2z}{4}=\frac{5}{4}$$

$$x=2-2y-w+z=2-\frac{20}{8}+\frac{19}{8}-1=\frac{7}{8}.$$

QUINDI LA SOLUZIONE E'

$$\begin{cases} x=7/8 \\ y=5/4 \\ w=-19/8 \\ z=-1 \end{cases}$$

2) SI TRATTA DI TROVARE $\vec{w}_1 \,//\, \pi$ TALE CHE $\vec{w} - \vec{w}_1 \perp \pi$.



$$\vec{w}_1 \,//\, \pi \iff \vec{w}_1 = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

CON $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. QUINDI BASTA TROVARE α, β TALI CHE:

$$\begin{cases} (\vec{w} - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (\vec{w} - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$
$\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$

CIOE'
$$\begin{cases} \alpha \|u\|^2 + \beta\, \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \|\vec{v}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

CON I VALORI DATI PER $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SI RICAVA IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + 11\beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 9\beta = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = -7/9 \\ \alpha = 1 - \beta = 16/9 \end{matrix}$$

LA PROIEZIONE E' QUINDI:

$$\vec{w}_1 = 16/9\, \vec{u} - \frac{7}{9}\vec{v} = \frac{16}{9}(\vec{i} + \vec{j}) - \frac{7}{9}(3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$
$$= -\frac{5}{9}\vec{i} + \frac{23}{9}\vec{j} + \frac{7}{9}\vec{k}.$$

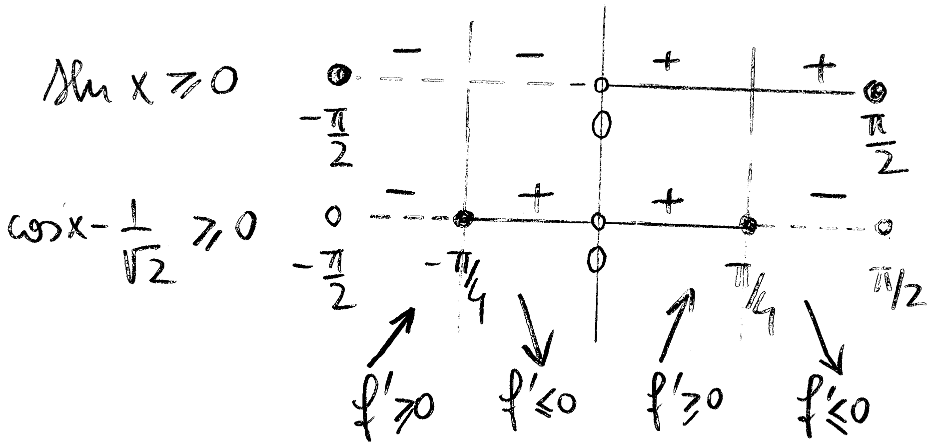
---

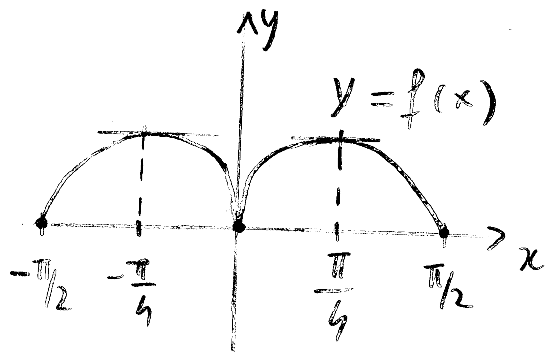
3) $f(x) = \cos x\, (1 - \cos x)^{\sqrt{2} - 1}$ E' CONTINUA PER OGNI x E DERIVABILE PER $x \neq 2k\pi$ (k INTERO).

$$f'(x) = -\sin x\, (1 - \cos x)^{\sqrt{2}-1} + (\sqrt{2} - 1) \cos x \sin x\, (1 - \cos x)^{\sqrt{2} - 2}$$
$$= (1 - \cos x)^{\sqrt{2} - 2} \left[-\sin x (1 - \cos x) + (\sqrt{2} - 1) \cos x \sin x \right]$$
$$= \sqrt{2}\, (1 - \cos x)^{\sqrt{2} - 2} \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad x \neq 2k\pi.$$

QUINDI AVREMO: $f'(x) \geq 0 \iff \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \geq 0$

$x \neq 2k\pi$





QUINDI $X = \pm \frac{\pi}{4}$ MAX RELATIVI $f(\frac{\pi}{4}) = f(-\frac{\pi}{4}) > 0$

$X = \pm \frac{\pi}{2}, 0$ MIN RELATIVI $f(\pm\frac{\pi}{2}) = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $X = \pm \frac{\pi}{4}$ MAX ASSOLUTI ; $X = \pm\frac{\pi}{2}, 0$ MIN. ASSOLUTI.

4)
$$\int_0^4 \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{1}{x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\ln(x+1)\right]_0^4 - \frac{1}{4}\left[\ln(x+5)\right]_0^4$$
$$= \frac{1}{4}\left(\ln 5 - \cancel{\ln 1}\right) - \frac{1}{4}\left(\ln 9 - \ln 5\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3 .$$

B1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria 18/1/18

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+2y+z=-1 \\ x+3y-2z=2 \\ 3x+y+4z=-4 \\ -x-7y+7z=-7 \\ 3x+5y-z=1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$, determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su un generico piano π parallelo a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\arctan x$ nell'intervallo $[-\sqrt{3},1]$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos x \sin x \, dx$.

1) SCAMBIAMO SUBITO LA 1^a RIGA CON LA 2^a E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -7 & 7 & -7 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_4+A_1 \\ A_5-3A_1}]{\substack{A_2-2A_1 \\ A_3-3A_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & -8 & 10 & -10 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_5-A_2]{\substack{A_3-2A_2 \\ A_4-A_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA HA $\infty^{3-2} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

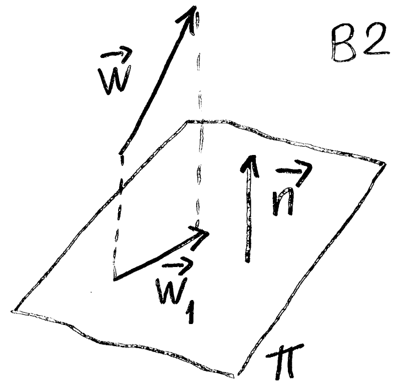
$$\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ -4y+5z=-5 \end{cases}$$

POSTO $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, TROVIAMO $y=\dfrac{5+5z}{4}=\dfrac{5+5t}{4}$

$$x = 2-3y+2z = 2-\frac{15+15t}{4}+2t = -\frac{7+7t}{4}.$$

SOLUZIONE:

$$x=-\frac{7+7t}{4},\quad y=\frac{5+5t}{4},\quad z=t \quad \text{PER } t\in\mathbb{R}.$$



2) POSTO $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ IL VETTORE $\vec{w}_1$ SARÀ DELLA FORMA

$$\vec{w}_1 = \vec{w} - \lambda \vec{n}$$

CON $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0$

QUINDI $\lambda = \dfrac{\vec{w} \cdot n}{\|n\|^2}$.

$\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

$\vec{w} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$

CON I VALORI DATI PER $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SI HA:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \|\vec{n}\| = 3$$

$$\lambda = \vec{w} \cdot \vec{n} / \|\vec{n}\|^2 = (2\vec{\imath} - \vec{k}) \cdot (-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}) / 9 = -\frac{5}{9}$$

QUINDI $\vec{w}_1 = \vec{w} - \lambda \vec{n} = (2\vec{\imath} - \vec{k}) + \frac{5}{9}(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k})$

$$= \frac{8}{9}\vec{\imath} - \frac{10}{9}\vec{\jmath} - \frac{4}{9}\vec{k} .$$

---

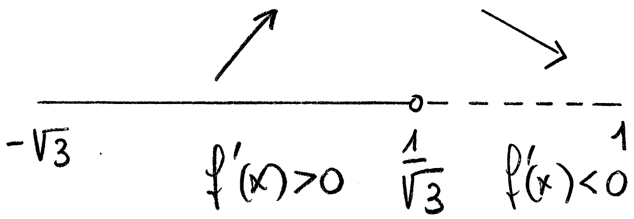
3) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \operatorname{arctang} x$ E' CONTINUA E DERIVABILE PER OGNI x.

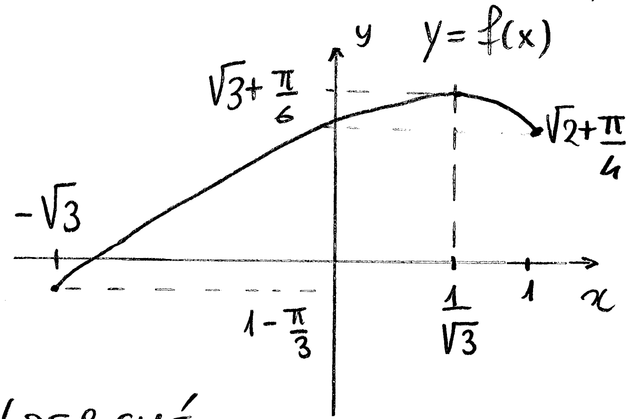
$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\left(\sqrt{1+x^2} - 2x\right)$$

QUINDI $f'(x) > 0 \iff \sqrt{1+x^2} > 2x$. LA DISEQUAZIONE E' CERTAMENTE VERIFICATA PER $x \leq 0$, MENTRE PER $x > 0$ SI RISOLVE ELEVANDO AL QUADRATO:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x^2} > 2x \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+x^2 > 4x^2 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 < \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

IN CONCLUSIONE NELL'INTERVALLO $[-\sqrt{3}, 1]$ ABBIAMO :





$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ E' MAX RELATIVO E ASSOLUTO (PERCHÉ $f'(x)$ CAMBIA SEGNO SOLO UNA VOLTA) $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

$x = -\sqrt{3}$, $x = 1$ SONO MINIMI RELATIVI.

POICHE' $f(1) = \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} > f(-\sqrt{3}) = 1 - \frac{\pi}{3}$, $x = -\sqrt{3}$ E' MINIMO ASSOLUTO.

---

4) ABBIAMO

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, x .$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos x\,\mathrm{sen}\, x\, dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, x\right)\cos x\,\mathrm{sen}\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{3}\cos^2 x\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}^2\cos x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^3 x - \frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{6} .$$

C1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria 18/1/18

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x+2y+w-z=1 \\ -x-2y+w+z=2 \\ 2x-y+w-3z=0 \\ 3x+3y+2w+2z=4 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i punti $A(2,3,-1)$, $O(0,1,-1)$ e $B(0,2,0)$, determinare la retta r bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ nel piano π passante per A, O, B.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=\sqrt{x}+\ln(1-x)$ nell'intevallo $[0,1)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x \sin x \, dx$.

1) SCAMBIAMO SUBITO LA PRIMA RIGA CON LA SECONDA RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+3A_1]{A_2+3A_1,\ A_3+2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[4A_4-3A_3]{4A_3-5A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -14 & -19 \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4+A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -14 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A)=3$

$\text{car}(A|B)=3$

IL SISTEMA HA $\infty^{4-3}=\infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE :

$$\begin{cases} -x-2y+w+z=2 \\ -4y+4w+2z=7 \\ -8w-14z=-19 \end{cases}$$

POSTO $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, ABBIAMO

$w=\dfrac{19-14t}{8}$, $y=\dfrac{4w+2z-7}{4} \Rightarrow$

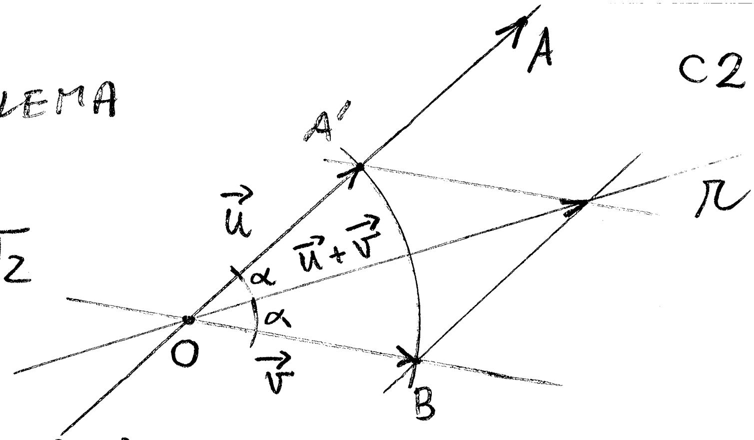
$$y=\frac{1}{4}\left(\frac{19-14t}{2}+2t-7\right)=\frac{5-10t}{8},$$

$$x=w+z-2y-2=$$

$$=\frac{19-14t}{8}+t-\frac{10-20t}{8}-2=\frac{14t-7}{8}.$$

C2

2) CON I DATI DEL PROBLEMA ABBIAMO:



$\vec{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\|\vec{OA}\| = 2\sqrt{2}$

$\vec{OB} = \vec{j} + \vec{k}$, $\|\vec{OB}\| = \sqrt{2}$

PONIAMO $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{v} = \vec{OB} = \vec{j} + \vec{k}$

POICHE' $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ IL VETTORE SOMMA $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ FORMA ANGOLI UGUALI CON $\vec{u}, \vec{v}$. QUINDI $\vec{w}$ E' PARALLELO ALLA BISETTRICE DELL'ANGOLO $\widehat{AOB}$. BASTA ALLORA SCRIVERE L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA PASSANTE PER $O = (0,1,-1)$ E $\parallel \vec{w}$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

3) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(1-x)$ E' CONTINUA IN $[0,1)$ E DERIVABILE IN $(0,1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)}, \quad x \in (0,1)$$

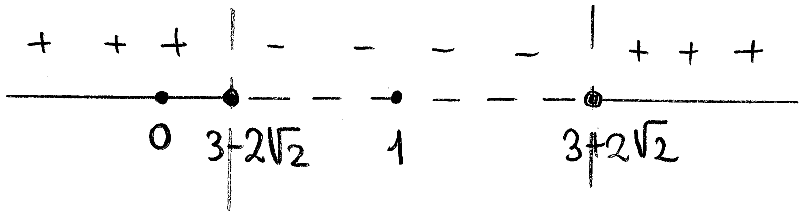
QUINDI $f'(x) \geq 0 \iff 1 - x \geq 2\sqrt{x}$, $x \in (0,1)$.

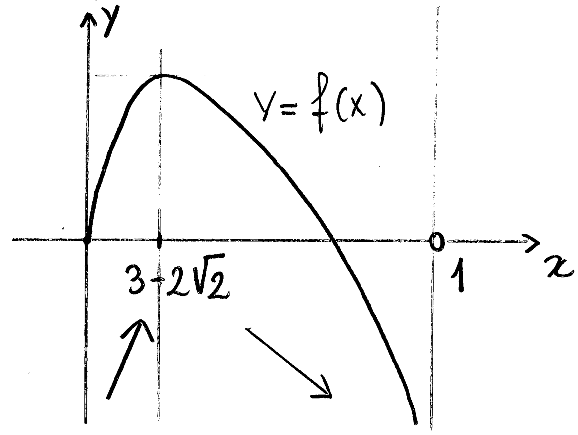
POICHE' ENTRAMBI I TERMINI DELL'ULTIMA DISEQUAZIONE SONO ≥ 0 PER $x \in (0,1)$ POSSIAMO ELEVARE AL QUADRATO:

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 6x + 1 \geq 0, \quad x \in (0,1)$$

MA $x^2-6x+1=\left(x-3+2\sqrt{2}\right)\left(x-3-2\sqrt{2}\right)\geq 0$

PER $x\leq 3-2\sqrt{2}$ E PER $x>3+2\sqrt{2}$:





$\Rightarrow f'(x)\geq 0$ IN $(0, 3-2\sqrt{2}]$

$f'(x)<0$ IN $(3-2\sqrt{2}, 1)$

QUINDI $\underline{x=3-2\sqrt{2}}$ E' MAX RELATIVO E ASSOLUTO (PERCHE' $f'(x)$ CAMBIA SEGNO UNA SOLA VOLTA) ; $\underline{x=0}$ E' MINIMO RELATIVO MA NON ASSOLUTO PERCHÉ

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x}+\ln(1-x) = -\infty .$$

---

4)
$$\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x \,\mathrm{sen}\, x \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sen}^2 x \cos x\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{3} .$$

D1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria

18/1/18

nome ____ cognome ____ matr. ____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y-w+2z=2 \\ x-y+w-z=2 \\ 2x-2y+w-z=0 \\ 3y-3w+4z=-4 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i punti $A(-3,-1,0)$, $O(-2,1,2)$ e $B(2,-3,0)$, determinare la retta r bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ nel piano π passante per A, O, B.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2+x+2}$ per $x\in\mathbf{R}$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3-2A_1]{A_2-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+A_2]{A_3-2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A)=3$

$car(A|B)=3$

IL SISTEMA HA $\infty^{4-3}=\infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x+2y-w+2z=2 \\ -3y+2w-3z=0 \\ -w+z=-4 \end{cases}$$

POSTO $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, ABBIAMO

$w=4+z=4+t$

$y=\dfrac{2w-3z}{3}=\dfrac{8+2t-3t}{3}=\dfrac{8-t}{3}$

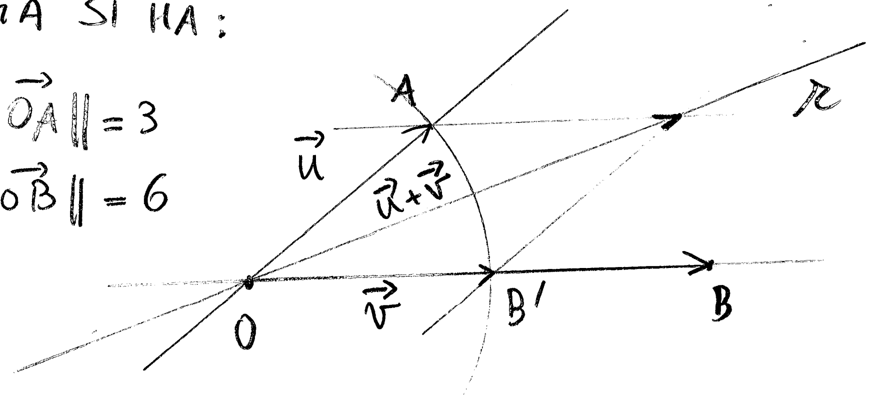
$x=2-2y+w-2z=2-\dfrac{16-2t}{3}+4+t-2t=\dfrac{2-t}{3}$.

SOLUZIONE: $x=\dfrac{2-t}{3}$, $y=\dfrac{8-t}{3}$, $w=4+t$, $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$.

2) CON I DATI DEL PROBLEMA SI HA:

$\vec{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\|\vec{OA}\| = 3$

$\vec{OB} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\|\vec{OB}\| = 6$



PONIAMO

$\vec{u} = \vec{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

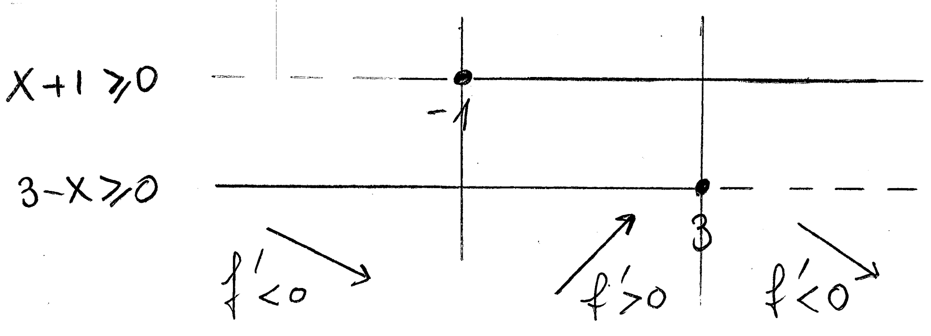
POICHE' $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ IL VETTORE SOMMA $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ FORMA ANGOLI UGUALI CON $\vec{u}, \vec{v}$. QUINDI $\vec{w}$ E' PARALLELO ALLA BISETTRICE DELL'ANGOLO $\widehat{AOB}$. BASTA ALLORA SCRIVERE L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA PASSANTE PER $O = (-2, 1, 2)$ E $\parallel \vec{w}$:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

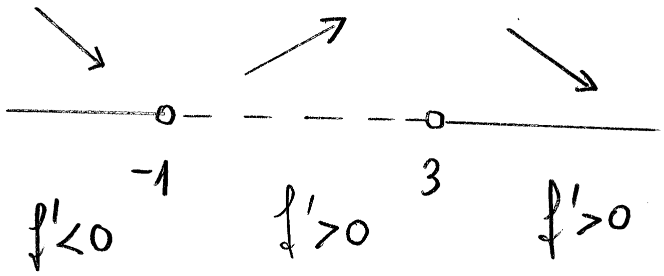
3) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+x+2}$ È CONTINUA E DERIVABILE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ PERCHE' x^2+x+2 NON HA RADICI REALI.

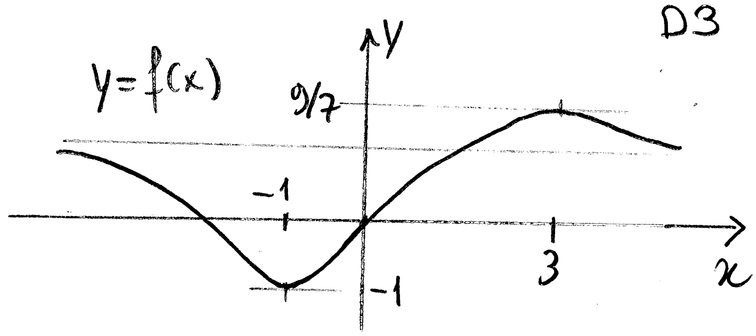
$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x+2) - (x^2+3x)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = (-2)\cdot\frac{x^2-2x-3}{(x^2+x+2)^2}$$

QUINDI $f'(x) \geq 0 \iff -2(x^2-2x-3) = 2(x+1)(3-x) \geq 0$



$f'(x) \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$





$x = -1$ MIN RELATIVO, $f(-1) = -1$

$x = 3$ MAX RELATIVO, $f(3) = \frac{9}{7}$

POICHE' $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+3x}{x^2+x+2} = 1$,

$x = -1$ E' MIN. ASSOLUTO; $x = 3$ E' MAX ASSOLUTO.

4) $$\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^{2x}+e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx$$

$$= \Big[e^x - \ln(e^x+1) \Big]_{-1}^{1}$$

$$= \big(e - \ln(e+1)\big) - \big(e^{-1} - \ln(e^{-1}+1)\big)$$

$$= e - \frac{1}{e} - \ln(e+1) + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$$

$$= e - \frac{1}{e} - \ln\cancel{(e+1)} + \ln\cancel{(e+1)} - \ln e =$$

$$= e - \frac{1}{e} - 1.$$

E1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria 18/1/18

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x + y + 3w - 2z = 0 \\ x - y - 2w + z = -2 \\ -4x + 3y + 7w - 4z = 4 \\ -3x + y + 4w - 3z = -2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare il volume dei tetraedri delimitati dai piani $z = 0$, $y = 0$, $x - y = 0$ e da un piano π ortogonale alla retta $r : x - 4 = \frac{y+2}{2} = z + 3$ e avente distanza $\delta = 2\sqrt{6}$ dall'origine degli assi.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = 3\tan^2 x + 2\ln(\cot x)$ nell'intevallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx$.

1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 7 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+3A_1]{\substack{A_2+2A_1 \\ A_3+4A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - y - 2w + z = -2 \\ -y - w = -4 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$, CON $s, t \in \mathbb{R}$, ABBIAMO:

$y = 4 - w = 4 - s$

$x = y + 2w - z - 2 = 4 - s + 2s - t - 2 = 2 + s - t.$

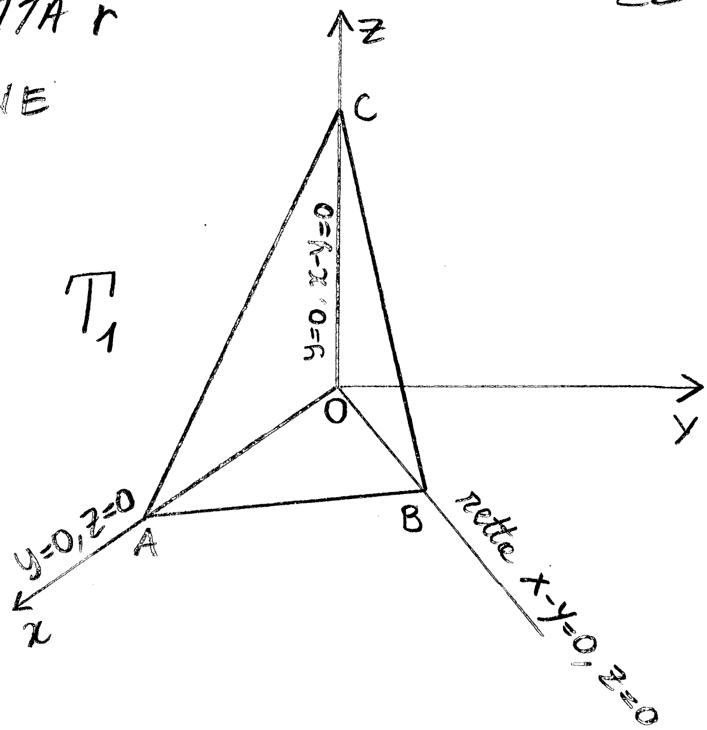
SOLUZIONE: $x = 2 + s - t$, $y = 4 - s$, $w = s$, $z = t$.

2) I PIANI ORTOGONALI ALLA RETTA r E DISTANTI $2\sqrt{6}$ DALL'ORIGINE HANNO EQUAZIONE

$$x + 2y + z + d = 0$$

CON d TALE CHE

$$\frac{|d|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 2\sqrt{6}$$



ABBIAMO QUINDI 2 PIANI:

$\pi_1 : x + 2y + z - 12 = 0,$

$\pi_2 : x + 2y + z + 12 = 0.$

TALI PIANI INDIVIDUANO (CON I PIANI DATI: $z=0$, $y=0$, $x-y=0$) DUE TETRAEDRI, T_1 E T_2, SIMMETRICI RISPETTO AL VERTICE O E AVENTI QUINDI LO STESSO VOLUME.

INTERSECANDO π_1 CON L'ASSE x, L'ASSE z, E LA RETTA $x-y=0, z=0$ TROVIAMO:

$$A = (12,0,0), \quad B = (4,4,0), \quad C = (0,0,12).$$

QUINDI

$$Vol(T_1) = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \right| = 96.$$

---

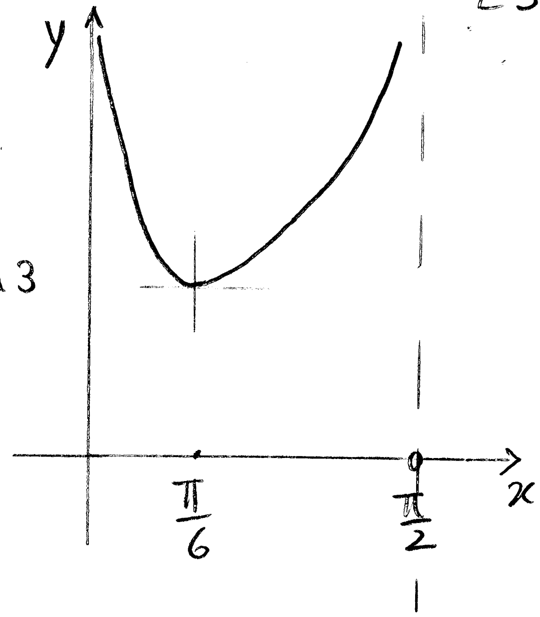
3) $f(x)$ E' CONTINUA E DERIVABILE IN $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 6 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \frac{1}{\cot x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{6}{\cos x \sin x}\left(\tan^2 x - \frac{1}{3}\right), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

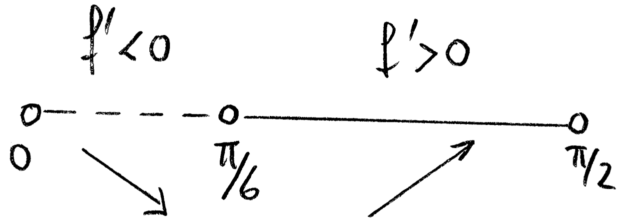
POICHE' $\cos x$, $\sin x$, $\tan x > 0$ IN $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

NELL'INTERVALLO $(0, \pi/2)$ ABBIAMO:



$$f'(x) > 0 \iff \operatorname{tang} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\iff x > \frac{\pi}{6}$$



QUINDI $x = \frac{\pi}{6}$ E' MIN RELATIVO E ASSOLUTO (PERCHE' $f'(x)$ CAMBIA SEGNO SOLO IN $\frac{\pi}{6}$). POICHÉ INOLTRE

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty,$$

$f(x)$ NON HA MASSIMI ASSOLUTI.

4) $$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln\left(e^{2x}+1\right) \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(e^2+1) - \ln(e^{-2}+1) \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^2+1}{e^{-2}+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^2) = 1.$$

F1

Università IUAV - Analisi Mat. & Geometria 18/1/18

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ -2x + 7y - 4z = 5 \\ 3x + 2y + 5z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare il volume dei tetraedri delimitati dai piani $z = 0$, $y = 0$, $2x - y = 0$ e da un piano π ortogonale al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e avente distanza $\delta = 2$ dall'origine degli assi.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \tan x + 3\cot^3 x$ nell'intevallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}\, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_4 + 2A_1 \\ A_5 - 3A_1}]{\substack{A_2 - A_1 \\ A_3 - 2A_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_5 + 4A_2]{\substack{A_3 + 5A_2 \\ A_4 - 11A_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[10A_5 - 6A_3]{A_4 + 2A_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{A_5 \uparrow\downarrow A_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = 3$

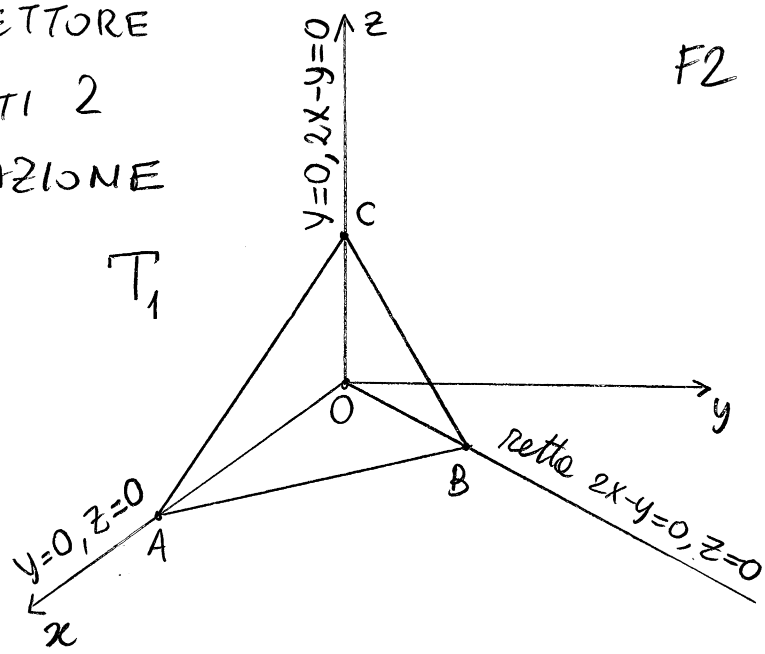
$\text{car}(A|B) = 4$

QUINDI PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI.

F2

2) I PIANI ORTOGONALI AL VETTORE $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ E DISTANTI 2 DALL'ORIGINE HANNO EQUAZIONE

$$x + 2y + 2z + d = 0$$



CON d TALE CHE

$$\frac{|d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 2$$

QUINDI $d = \pm 6$.

ABBIAMO ALLORA 2 PIANI:

$\pi_1 : x + 2y + 2z - 6 = 0$,

$\pi_2 : x + 2y + 2z + 6 = 0$.

TALI PIANI DELIMITANO (CON I PIANI DATI: $z=0$, $y=0$ E $2x-y=0$) DUE TETRAEDRI, T_1 E T_2, SIMMETRICI RISPETTO AL VERTICE O, E AVENTI QUINDI LO STESSO VOLUME. INTERSECANDO π_1 CON L'ASSE x, L'ASSE z, E LA RETTA $2x-y=0, z=0$, TROVIAMO:

$$A = (6,0,0), \quad B = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0\right), \quad C = (0,0,3).$$

QUINDI

$$Vol(T_1) = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6/5 & 12/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{36}{5}.$$

---

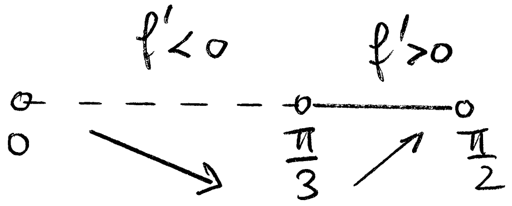
3) $f(x)$ E' CONTINUA E DERIVABILE IN $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

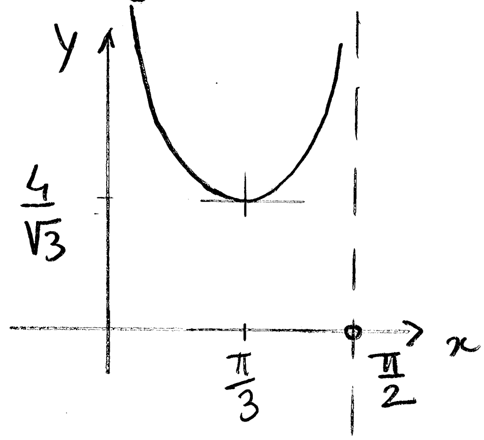
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 9\,\text{cotg}^2 x \left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^4 x}\left(\text{tg}^4 x - 9\right).$$

QUINDI, TENUTO CONTO CHE $\tan x > 0$ IN $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, TROVIAMO:

$$f'(x) > 0 \iff \tan^4 x > 9 \iff \tan x > \sqrt{3}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$





$x = \frac{\pi}{3}$ E' MINIMO RELATIVO

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 3\,\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

E' ANCHE MINIMO ASSOLUTO PERCHE' $f'(x)$ CAMBIA SEGNO SOLO IN $\frac{\pi}{3}$. POICHE'

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

NON CI SONO MASSIMI ASSOLUTI.

4)
$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}\,dx = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x}\right)'dx = 4\left[\sqrt{1+\sqrt{x}}\,\right]_4^9$$

$$= 4\left[\sqrt{1+\sqrt{9}} - \sqrt{1+\sqrt{4}}\,\right] = 4\left(2-\sqrt{3}\right).$$