A

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria

6/6/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

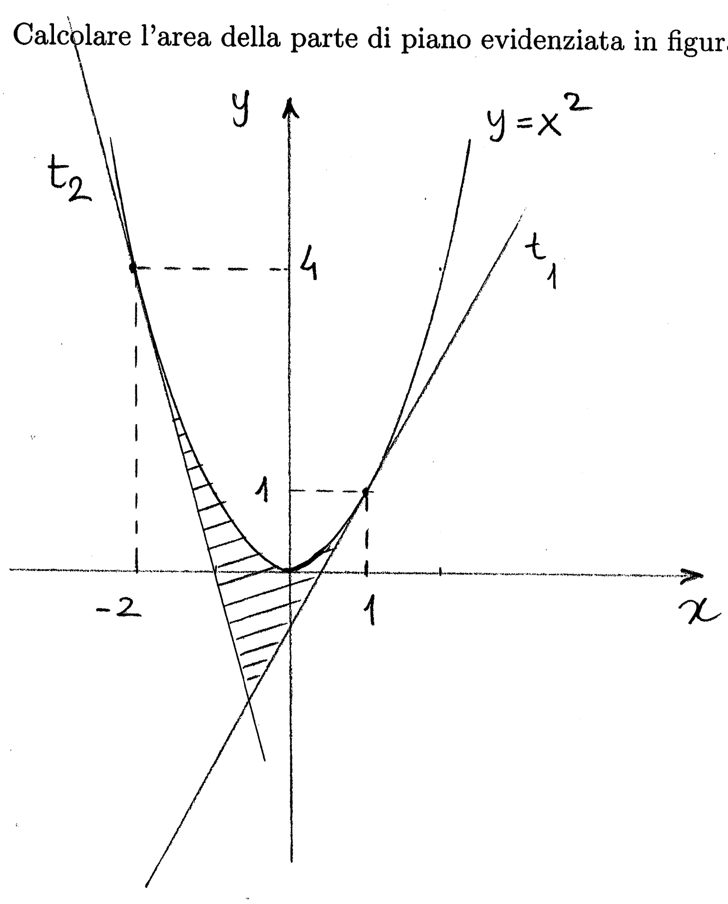
$$\begin{cases} 2x + y + 3w - z = 3 \\ 3x - 2y + w + z = 2 \\ -x - 4y - 5w + 3z = -4 \\ x - 10y - 9w + 7z = -6 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D sapendo che $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 4, -1)$ mentre C, D si trovano nelle intersezioni della retta $r: \ x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = -z$ con i piani π_1: $x+y+2z = 1$ e π_2: $2x - y + 2z = 4$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ nell'intevallo $[-1, 1]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



t_1 TANGENTE IN $(1,1)$

t_2 TANGENTE IN $(-2,4)$

1) SCAMBIAMO LA 1^a RIGA CON LA 4^a E RIDUCIAMO A SCALA: A1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & -9 & 7 & -6 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3+A_1 \\ A_4-2A_1}]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & -9 & 7 & -6 \\ 0 & 28 & 28 & -20 & 20 \\ 0 & -14 & -14 & 10 & -10 \\ 0 & 21 & 21 & -15 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4A_4-3A_2]{2A_3+A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & -9 & 7 & -6 \\ 0 & 28 & 28 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - 10y - 9w + 7z = -6 \\ 7y + 7w - 5z = 5 \end{cases}$$

POSTO $\begin{cases} w = s \\ z = t \end{cases}$ $s, t \in \mathbb{R}$

RICAVIAMO $y = \frac{5t}{7} - s + \frac{5}{7}$,

$x = 10y + 9w - 7z - 6 = \frac{50}{7}t - 10s + \frac{50}{7} + 9s - 7t - 6 = \frac{t}{7} - s + \frac{8}{7}$.

---

2) DETERMINIAMO $C = t \cap \pi_1$:

$$\begin{cases} x-3 = \frac{y+1}{2} = -z \\ x+y+2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-z, \quad y = -2z-1 \\ 3-z-2z-1+2z = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $z = 1$, $x = 2$, $y = -3$ $\quad C = (2, -3, 1)$

DETERMINIAMO $D = t \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} x-3 = \dfrac{y+1}{2} = -z \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - z, \quad y = -2z - 1 \\ 6 - \cancel{2z} + \cancel{2z} + 1 + 2z = 4 \end{cases}$$

$$z = -\frac{3}{2}, \quad x = \frac{9}{2}, \quad y = 2 \Rightarrow D = \left(\frac{9}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \cdot \vec{AD} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{7}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 3 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \cancel{3} - \cancel{3} - 5\left(-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) - (3+7) \right| = \frac{5}{2}.$$

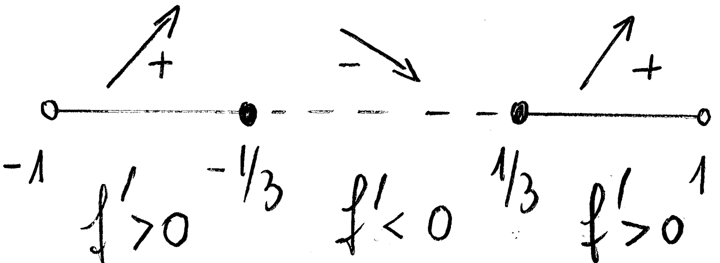
---

3) $f(x)$ E' CONTINUA IN $[-1, 1]$ E DERIVABILE IN $(-1, 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{3}{2} \frac{1}{2^{3/2}} (1-x)^{1/2}, \quad -1 < x < 1.$$

RISOLVIAMO ORA LA DISEQUAZIONE $f'(x) \geq 0$:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3/2}(1+x)^{-1/2} \geq 3(1-x)^{1/2} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 1 \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$



$x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ MIN. REL.

$x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ MAX. REL.

TENUTO CONTO CHE $f(-1)=1$, $f(1)=\sqrt{2}$

$f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{7}{3\sqrt{3}}$, SI HA:

$x=-1$ MIN. ASSOLUTO; $x=1$ MAX. ASSOLUTO.

---

4) LE TANGENTI t_1, t_2 HANNO EQUAZIONI:

$$t_1: \; y = 2x-1,$$

$$t_2: \; y = -4x-4,$$

E SI INTERSECANO IN $P = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

QUINDI L'AREA A E' DATA DA:

$$A = \int_{-2}^{-1/2} (x^2+4x+4)\,dx + \int_{-1/2}^{1} (x^2-2x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{-1/2} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-1/2}^{1}$$

$$= \left(-\cancel{\frac{1}{24}} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + \cancel{8} - \cancel{8}\right) + \left(\frac{1}{3} - \cancel{1} + \cancel{1}\right)$$

$$- \left(-\cancel{\frac{1}{24}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

B

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria 6/6/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

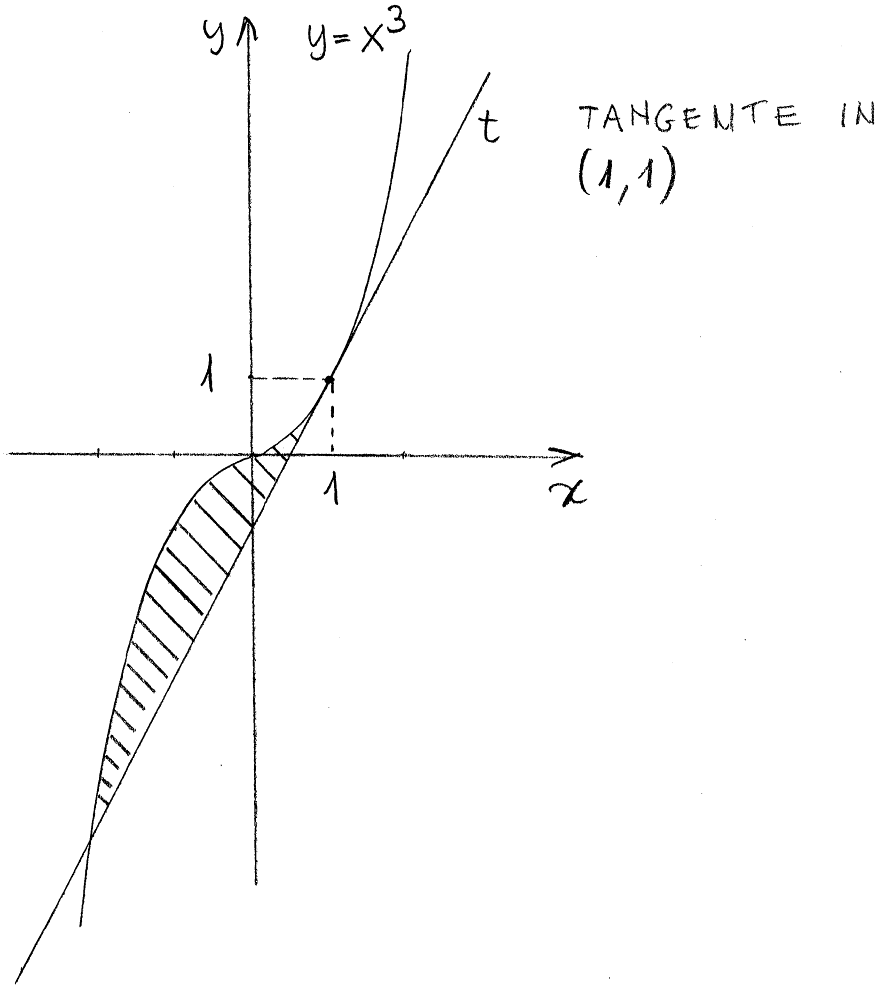
$$\begin{cases} 5x - y + 3w - z = 2 \\ x + 2y + w - 3z = 2 \\ 3x + y + 2w - 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3w - 2z = 6 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D sapendo che $A = (2, 0, -3)$, $B = (1, 1, -5)$ mentre C, D si trovano nelle intersezioni della retta $t: \dfrac{x-3}{4} = y - 3 = z$ con i piani π_1: $x+y+2z = -1$ e π_2: $2x - y + 2z = 3$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{(1-x)^3}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3-3A_1 \\ A_4-4A_1}]{A_2-5A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & -2 & 14 & -8 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & -6 & -1 & 10 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4-A_3]{A_2-2A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3-5A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -26 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

QUINDI $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x+2y+w-3z=2 \\ -y+6z=4 \\ w+26z=26 \end{cases}$$

POSTO $z=t$, $t\in\mathbb{R}$,

$w = 26-26t$

$y = 6t-4$

$$x = -2y-w+3z+2 = -2(6t-4)-26+26t+3t+2 = 17t-16.$$

---

2) DETERMINIAMO $C = t \cap \pi_1$ RISOLVENDO:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = y-3 = z \\ x+y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y-3, \quad x=4y-9 \\ 4y-9+y+2y-6=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y=2,\ x=-1,\ z=-1 \Rightarrow C=(-1,2,-1).$

DETERMINIAMO $D = t \cap \pi_2$ RISOLVENDO:

B2

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = y-3 = z \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y-3\,, \quad x = 4y-9 \\ 2(4y-9) - y + 2y - 6 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 3$, $x = 3$, $z = 0$. QUINDI $D = (3,3,0)$.

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC} \cdot \vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{6}\left|-3(-9-2)\right| = \frac{11}{2}.$$

---

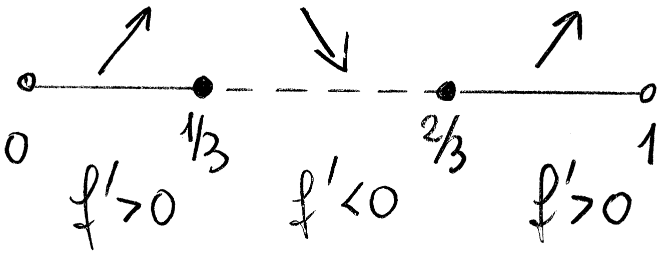
3) $f(x)$ E' CONTINUA IN $[0,1]$ E DERIVABILE IN $(0,1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{2}\sqrt{1-x} \qquad (0 < x < 1)$$

QUINDI $f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 9x^2 - 9x + 2 \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

NELL'INTERVALLO $(0,1)$ ABBIAMO ALLORA



$\Rightarrow$ $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$ MIN. REL.

$x = \frac{1}{3}$, $x = 1$ MAX. REL.

POICHE' SI HA: $f(1) = \sqrt{2} > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$;

$f(0) = 1 < f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3\sqrt{3}}$ DEDUCIAMO CHE

$X=1$ E' MAX. ASSOLUTO ; $X=0$ E' MIN. ASSOLUTO.

---

4) LA RETTA TANGENTE IN $(1,1)$ HA EQUAZIONE

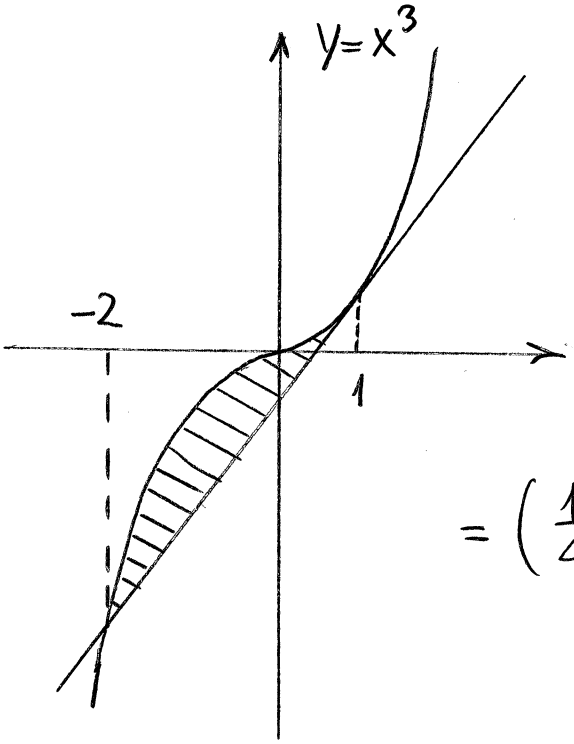
$$y = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$$

DETERMINIAMO LE INTERSEZIONI CON IL GRAFICO DI $y = x^3$ RISOLVENDO IL SISTEMA

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \qquad \text{CIOE'} \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

POICHE' $x = 1$ E' SICURAMENTE UNA RADICE (DOPPIA) DI $x^3 - 3x + 2 = 0$, POSSIAMO FATTORIZZARE:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2)$$



$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(\cancel{4} - 6 - \cancel{4} \right) = \frac{27}{4}.$$

C

Università IUAV - Compitino di Analisi Mat. & Geometria

6/6/17

nome ____________ cognome ____________ matr. ____________

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

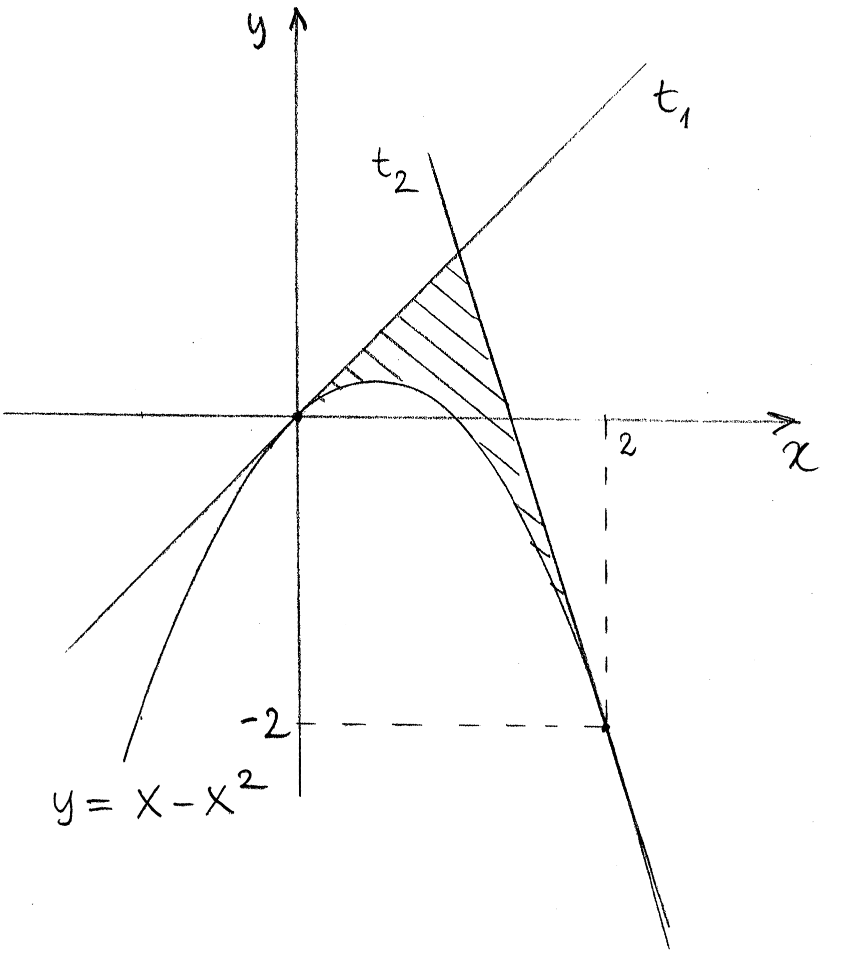
$$\begin{cases} -8y + 8w + 4z = 3 \\ 3x - y - 2w - z = 3 \\ x - 3y + 2w + z = 2 \\ 2x - 2y - w - 5z = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare i punti P, Q della retta $r: \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{2}$ che hanno distanza $d = \sqrt{6}$ dalla retta $t: x - 1 = \frac{y+2}{-1} = z + 1$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \left(\frac{x}{16}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3-x}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$ nell'intervallo $[0, 3]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura:



t_1 TANGENTE IN $(0,0)$

t_2 TANGENTE IN $(2,-2)$

1) SCAMBIAMO LA 1^a RIGA CON LA 3^a E RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_1]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2A_4-A_2]{A_3+A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4 \uparrow\downarrow A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - 3y + 2w + z = 2 \\ 8y - 8w - 4z = -3 \\ 2w + 10z = 7 \end{cases}$$

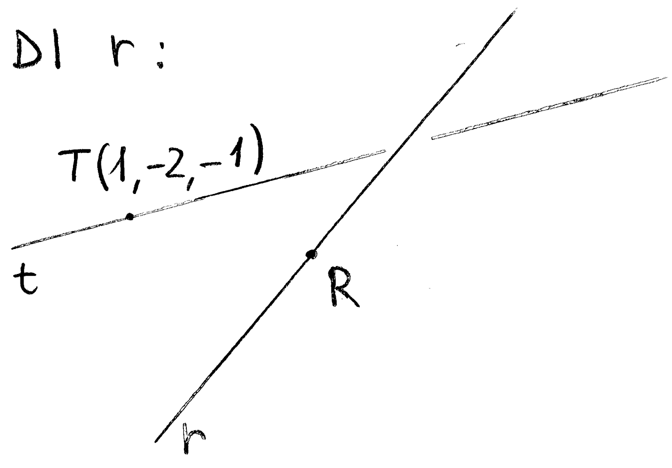
POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ SI HA $w = \dfrac{7-10t}{2}$

$$y = w + \frac{z}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7-10t}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{8} = \frac{25}{8} - \frac{9}{2}t,$$

$$x = 3y - 2w - z + 2 = \frac{75}{8} - \frac{27}{2}t - 7 + 10t - t + 2 = \frac{35}{8} - \frac{9}{2}t.$$

2) DETERMINIAMO L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI $r: \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+1}{2}$. POSTO $y = h$, $h \in \mathbb{R}$, SI HA $x = 2h+3$, $z = 2h+1$. INDICHIAMO CON $R = R(h)$ IL CORRISPONDENTE PUNTO DI r:

$$R = (2h+3, h, 2h+1)$$



TENUTO CONTO CHE LA RETTA t PASSA PER IL PUNTO $T=(1,-2,-1)$ E CHE E' PARALLELA AL VETTORE $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, ABBIAMO

$$dist(R,t)=\frac{\|\vec{TR}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2h+2 & h+2 & 2h+2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{3}}\|(3h+4)\vec{i}-(3h+4)\vec{k}\|$$

$$=|3h+4|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

QUINDI $dist(R(h),t)=\sqrt{6} \iff |3h+4|=3$

$\Rightarrow h=-1/3$ OPPURE $h=-\frac{7}{3}$.

I PUNTI CERCATI SONO ALLORA $P=R(-\frac{1}{3})=(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ E $Q=R(-\frac{7}{3})=(-\frac{5}{3},-\frac{7}{3},-\frac{11}{3})$.

3) $f(x)$ E' CONTINUA IN $[0,3]$ E DERIVABILE PER $0<x<3$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^{1/3}\frac{1}{3}x^{-2/3}-\frac{1}{5^{5/3}}\frac{5}{3}(3-x)^{2/3}$$

QUINDI $f'(x)\geq 0$ SE E SOLO SE

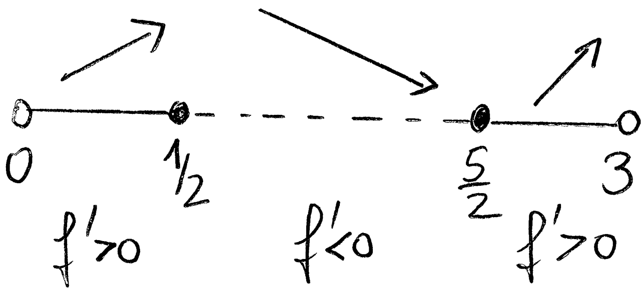
$$\left(\frac{1}{16}\right)^{1/3}\frac{1}{x^{2/3}}\geq\frac{1}{5^{2/3}}(3-x)^{2/3}.$$

TENUTO CONTO CHE $0<x<3$, LA DISUGUAGLIANZA E' EQUIVALENTE A $\frac{1}{4x}\geq\frac{3-x}{5}$ CIOE'

CIOE' $4x^2 - 12x + 5 \geq 0$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) \geq 0 \qquad (0 < x < 3)$$

ABBIAMO QUINDI



$\Rightarrow$ $x=0$, $x=\frac{5}{2}$ MIN. REL.

$x=\frac{1}{2}$, $x=3$ MAX REL.

POICHE' $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(3)$, $f\left(\frac{5}{2}\right) > f(0)$

$x=\frac{1}{2}$ E' MAX ASSOLUTO, $x=0$ E' MIN ASSOLUTO.

4) t_1 HA EQUAZIONE $y = x$

t_2 HA EQUAZIONE $y = -3x + 4$

QUINDI t_1 E t_2 SI INTERSECANO $P = (1,1)$.

L'AREA DELLA PARTE EVIDENZIATA E' QUINDI DATA DA:

$$A = \int_0^1 \left[x - (x - x^2)\right] dx + \int_1^2 \left[4 - 3x - (x - x^2)\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\cancel{8} - \cancel{8} + \frac{8}{3}\right) - \left(4 - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$