A_1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/9/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - x_5 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, determinare il volume del parallelepipedo che ha per spigoli i vettori: $\mathbf{v} + 2\mathbf{u}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + 3\mathbf{w}$.

3) Determinare massimi, minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = 2\tan x + 3\cot 2x$ nell'intervallo $(0, \pi/2)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{1/5}^{2} \frac{|\ln 3x|}{x}\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI DEL SISTEMA:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+A_1]{A_2-2A_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3+A_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|B) = 3$

$\Rightarrow \infty^{5-3} = \infty^2$ SOLUZ.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 - 3x_5 = -4 \\ -4x_5 = -6 \end{cases} \Rightarrow \quad x_5 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{4-3x_5}{4} = -\frac{1}{8}$$

QUINDI $\quad x_1 - x_3 + 3x_4 = 1 - 3x_2 - x_5 = 1 + \frac{3}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}$

POSTO $\quad x_3 = s,\ x_4 = t \quad$ RICAVIAMO INFINE

$x_1 = s - 3t - 1/8$

LA SOLUZIONE E' QUINDI

$$\left(s-3t-\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8},\ s,\ t,\ \frac{3}{2} \right), \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

2) $\vec{v}+2\vec{u} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k} = -3\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{v}-\vec{w} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}-2\vec{i}+\vec{k} = -\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{u}+3\vec{w} = -2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}+6\vec{i}-3\vec{k} = 4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO E' DATO DAL VALORE ASSOLUTO DEL PRODOTTO MISTO DEI TRE VETTORI TROVATI:

$$\text{Vol.} = \left| \begin{vmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right| = \left| -3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right| = \left|(-3)\cdot 6 + 4\cdot(-6) + 3\cdot 9\right| = 15.$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 3\cdot\frac{2}{(\sin 2x)^2} = \frac{4\sin^2 x - 3}{2\cos^2 x \sin^2 x}$$

QUINDI $f'(x) > 0$ IN $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \iff 4\sin^2 x - 3 > 0.$

$4\sin^2 x - 3 > 0$
$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

0	$-$	$\frac{\pi}{3}$	$+$	$\frac{\pi}{2}$
	$f'<0$ $\searrow$		$\nearrow$ $f'>0$	

QUINDI $x = \frac{\pi}{3}$ E' MINIMO RELATIVO E ASSOLUTO IN $(0, \frac{\pi}{2})$.

POICHE' $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

NON CI SONO MASSIMI ASSOLUTI.

$$|\ln 3x| = \begin{cases} \ln 3x & \text{PER } x \geq \frac{1}{3} \\ -\ln 3x & \text{PER } 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

QUINDI ABBIAMO

$$\int_{1/5}^{2} \frac{|\ln 3x|}{x}\, dx = -\int_{1/5}^{1/3} \frac{\ln 3x}{x}\, dx + \int_{1/3}^{2} \frac{\ln 3x}{x}\, dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(\ln 3x)^2\right]_{1/5}^{1/3} + \left[\frac{1}{2}(\ln 3x)^2\right]_{1/3}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{5}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}(\ln 6)^2.$$

B_1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/9/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, determinare il volume del parallelepipedo che ha per spigoli i vettori: $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$.

3) Determinare massimi, minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \tan 2x + 2\cot x$ nell'intervallo $(0, \pi/4)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{1/3}^{1} \frac{|\ln 2x|}{x}\, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI DEL SISTEMA:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+A_1]{A_2-2A_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3A_3-2A_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 12 \end{array}\right) \qquad \text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3$$

$$\Rightarrow \infty^{5-3} = \infty^2 \text{ SOLUZ.}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_4 - 5x_5 = -3 \\ 16x_5 = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad x_5 = \frac{3}{4} \qquad x_4 = \frac{5x_5 - 3}{3} = \frac{1}{4}$$

QUINDI $x_1 + 2x_2 + x_3 = x_4 - x_5 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

POSTO $x_2 = s$, $x_3 = t$ RICAVIAMO

$$x_1 = -2s - t - 1/2$$

LA SOLUZIONE E' DATA DA:

$$\left(-2s-t-\frac{1}{2},\ s,\ t,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right),\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

2) $\vec{v}-2\vec{u} = 3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}+4\vec{j}-2\vec{k} = 3\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$

$\vec{u}+\vec{w} = -2\vec{j}+\vec{k}+2\vec{j}+\vec{k} = 2\vec{k}$

$\vec{u}-3\vec{w} = -2\vec{j}+\vec{k}-6\vec{j}-3\vec{k} = -8\vec{j}-2\vec{k}$

IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO E' DATO DAL VALORE ASSOLUTO DEL PRODOTTO MISTO DEI VETTORI CHE RAPPRESENTANO GLI SPIGOLI:

$$\text{Vol.} = \left|\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -2 \end{vmatrix}\right| = \left|(-2)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}\right| = 48.$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$:

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)} - \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2(2x)\sin^2 x}\left[\sin^2 x - \cos^2(2x)\right]$$

$$= \frac{2}{\cos^2(2x)\sin^2 x}\left[\sin^2 x - (1-2\sin^2 x)^2\right]$$

$$= \frac{-2}{\cos^2(2x)\sin^2 x}\left(4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1\right)$$

$$= \frac{-2}{\cos^2(2x)\sin^2 x}\cdot 4\cdot\left(\sin^2 x - 1\right)\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)$$

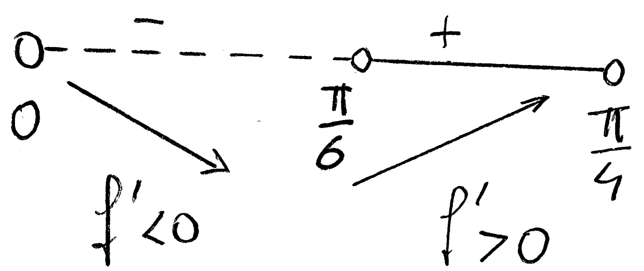
B_3

POICHE' $\operatorname{sen}^2 x - 1 < 0$ IN $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, ABBIAMO

$$f'(x) > 0 \iff \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4} > 0 .$$

$\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4} > 0$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$



QUINDI $x = \frac{\pi}{6}$ E' MINIMO RELATIVO E ASSOLUTO.

POICHE' $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, NON CI SONO MASSIMI ASSOLUTI.

4) $$|\ln 2x| = \begin{cases} \ln 2x & \text{SE } x \geq \frac{1}{2} \\ -\ln 2x & \text{SE } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_{1/3}^{1} \frac{|\ln 2x|}{x}\, dx = - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln 2x}{x}\, dx + \int_{1/2}^{1} \frac{\ln 2x}{x}\, dx$$

$$= - \left[\frac{1}{2} (\ln 2x)^2 \right]_{1/3}^{1/2} + \left[\frac{1}{2} (\ln 2x)^2 \right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\ln 2\right)^2 .$$