Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/2/16

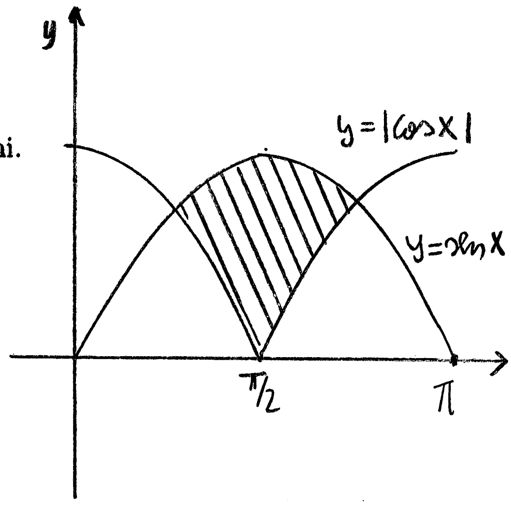
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in **STAMPATELLO**. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3w + z = 2 \\ x - 2y + w - 2z = 4 \\ -x + y + 2w - z = 1 \\ -3x - w + 4z = -4 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.



2) Determinare i versori $\mathbf{w}$ paralleli al piano π: $x - 2y + z - 2 = 0$ e ortogonali alla retta $r : \begin{cases} 2x - 5y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}\ln(x^2)$ per $x \neq 0$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

A

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria

5/2/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

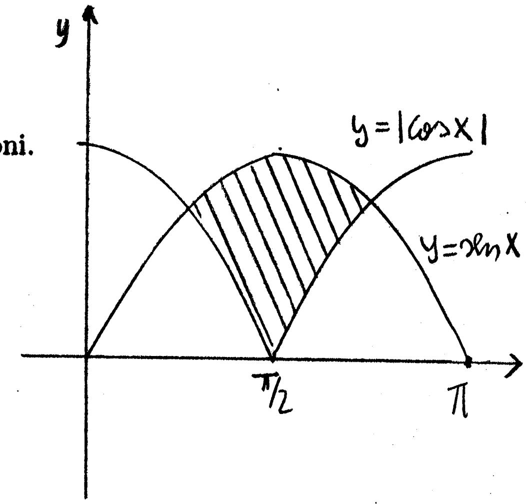
$$\begin{cases} 2x - 5y - 3w + z = 2 \\ x - 2y + w - 2z = 4 \\ -x + y + 2w - z = 1 \\ -3x - w + 4z = -4 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Determinare i versori $\mathbf{w}$ paralleli al piano π: $x - 2y + z - 2 = 0$ e ortogonali alla retta $r : \begin{cases} 2x - 5y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}\ln(x^2)$ per $x \neq 0$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3+A_1 \\ A_4+3A_1}]{A_2-2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-6A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 32 & -32 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-4A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI.

$$\begin{cases} x - 2y + w - 2z = 4 \\ -y - 5w + 5z = -6 \\ 8w - 8z = 11 \end{cases}$$

POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

$w = \frac{11}{8} + t$

$y = 6 - 5w + 5z = -\frac{7}{8}$

$x = 4 + 2y - w + 2z = 4 - \frac{14}{8} - \frac{11}{8} - t + 2t = \frac{7}{8} + t$

A2

2) LA RETTA $r: \begin{cases} 2x-5y-z=2 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$ E' PARALLELA

AL VETTORE
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k} \stackrel{!}{=} -4\left(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right).$$

QUINDI $\vec{w} \perp \vec{r} \iff \vec{w} \perp \left(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$.

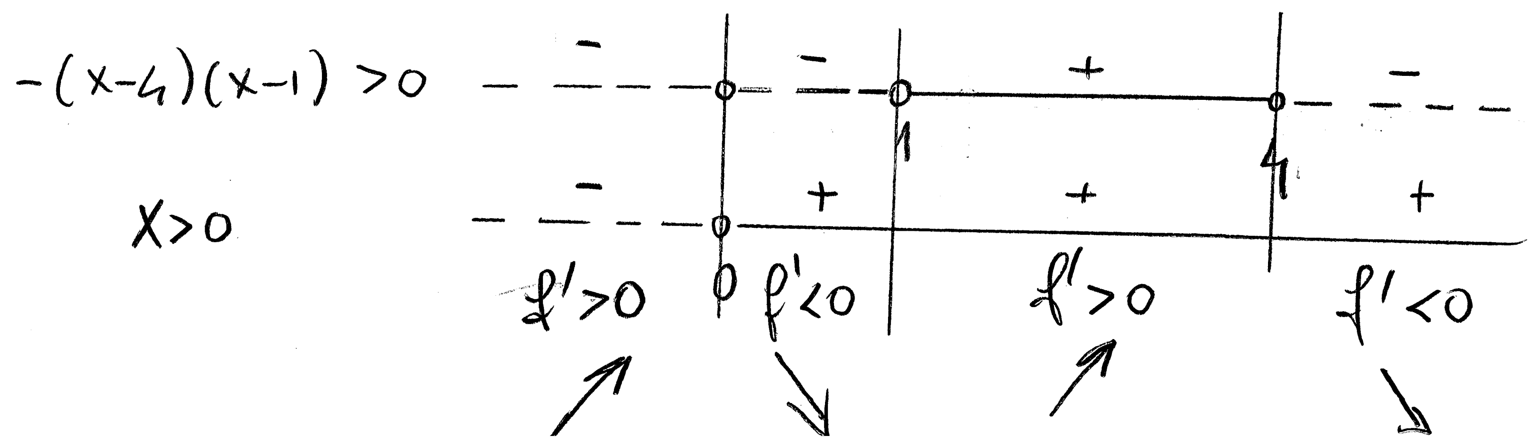
INOLTRE $\vec{w} \parallel \pi \iff \vec{w} \perp \left(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$.

I VERSORI CERCATI SONO QUINDI PARALLELI AL PRODOTTO VETTORIALE:
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k} = \vec{u}, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{35}.$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \pm \frac{1}{\sqrt{35}}\left(\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\right).$$

---

3) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{5x} = 2\,\frac{5x-4-x^2}{(4+x^2)\,x}$$
$$= -\frac{2(x-4)(x-1)}{(4+x^2)\cdot x}, \quad x \neq 0.$$



QUINDI $x=1$ E' MIN. RELATIVO,

$x=4$ E' MAX. RELATIVO.

POICHE' $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}\ln(x^2) = +\infty$,

$\lim_{x\to \pm\infty} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}\ln(x^2) = -\infty$

$f(x)$ NON HA MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI.

$\sin x = |\cos x|$ IN $[0, \pi]$ PER $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^{3/4\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$$

$$= \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} + \Big[-\cos x + \sin x\Big]_{\pi/2}^{3/4\pi}$$

$$= \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right]$$

$$= 2(\sqrt{2}-1).$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/2/16

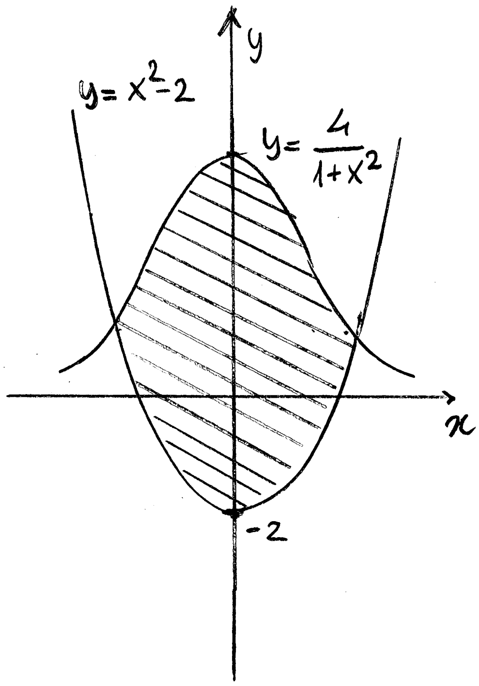
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 5y - 3w + z = 1 \\ -x - 2y + w - 2z = -2 \\ -2x + 2y + 2w - z = -2 \\ x + 4y - w + 4z = 0 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.



2) Scomporre il vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ nelle sue componenti ortogonale e parallela alla retta $r : \begin{cases} 2x - 6y - z = 2 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \sin(2x)\, \sin^2 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

B

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria

5/2/16

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

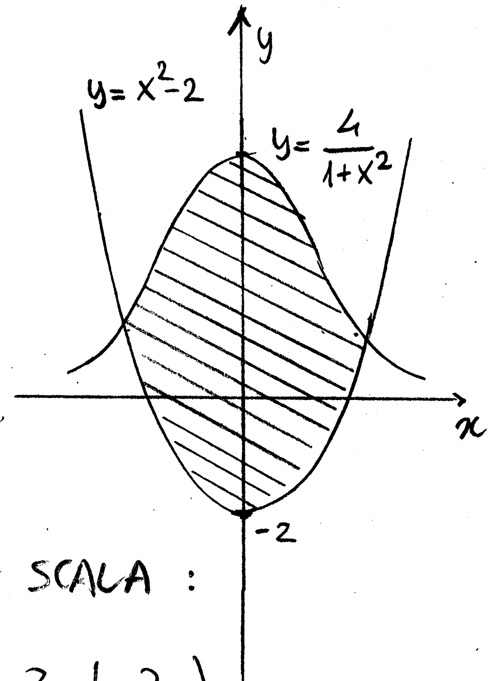
$$\begin{cases} 3x - 5y - 3w + z = 1 \\ -x - 2y + w - 2z = -2 \\ -2x + 2y + 2w - z = -2 \\ x + 4y - w + 4z = 0 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Scomporre il vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ nelle sue componenti ortogonale e parallela alla retta $r : \begin{cases} 2x - 6y - z = 2 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x) = \sin(2x)\sin^2 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - 2A_1 \\ A_4 + A_1}]{A_2 + 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -11 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[11A_4 + 2A_2]{11A_3 + 6A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -11 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -32 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4 - 4A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -11 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} -x - 2y + w - 2z = -2 \\ -11y - 5z = -5 \\ 3z = -8 \end{cases}$$

$z = -\frac{8}{3}$, $y = \frac{5 - 5z}{11} = \frac{5}{3}$

POSTO $w = t$, $t \in \mathbb{R}$,

$x = 2 - 2y + w - 2z = 2 - \frac{10}{3} + t + \frac{16}{3} = 4 + t.$

2) LA RETTA r E' PARALLELA AL VETTORE

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$$

QUINDI $r \parallel \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

SCOMPONIAMO ORA $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ NELLE SUE COMPONENTI PARALLELA $(\vec{u}_{\parallel})$ E ORTOGONALE $(\vec{u}_{\perp})$ AL VETTORE $\vec{v}$:

$$\vec{u}_{\parallel} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \frac{(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}(\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})$$

$$= \frac{-9}{\sqrt{18}}(\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}) = -\frac{3}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = 2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k} + \frac{3}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$= \left(2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} + 3(1-2\sqrt{2})\vec{k}$$

3) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen}^3 x \cos x$ B3

$$f'(x) = 6 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^4 x$$

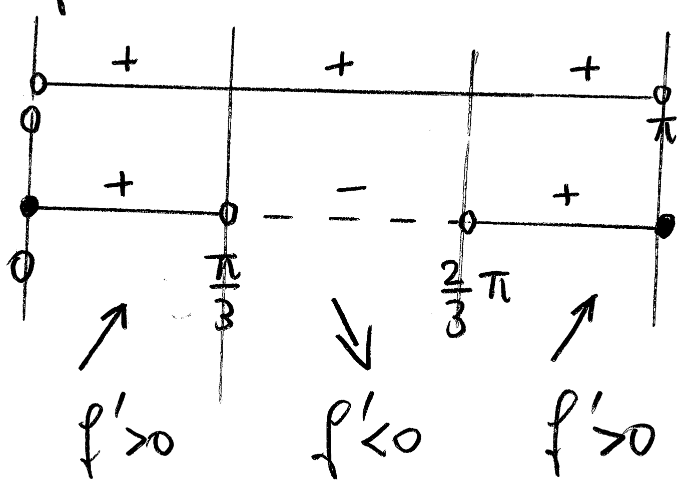
$$= 2 \operatorname{sen}^2 x \left[3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \right]$$

$$= 2 \operatorname{sen}^2 x \left[3 - 4 \operatorname{sen}^2 x \right]$$

QUINDI, IN $[0, \pi]$, $f' > 0$ QUANDO:

$\operatorname{sen}^2 x > 0$

$3 - 4 \operatorname{sen}^2 x > 0$



$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{3}$ MAX. REL. ; $x = \frac{2}{3}\pi$ MIN. REL.

POICHE' $f(0) = f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$x = \frac{\pi}{3}$ E' MAX. ASSOLUTO.

$x = \frac{2}{3}\pi$ E' MIN. ASSOLUTO.

B4

4) $x^2-2 = \frac{4}{1+x^2} \iff x^4 - x^2 - 6 = 0$

$(x^4-x^2-6) = (x^2-3)(x^2+2)$

QUINDI $x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{1+x^2} - x^2 + 2 \right) dx$$

$$= \left[4 \arctan x - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 4 \arctan \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$
$$- 4 \arctan(-\sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}.$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/2/16

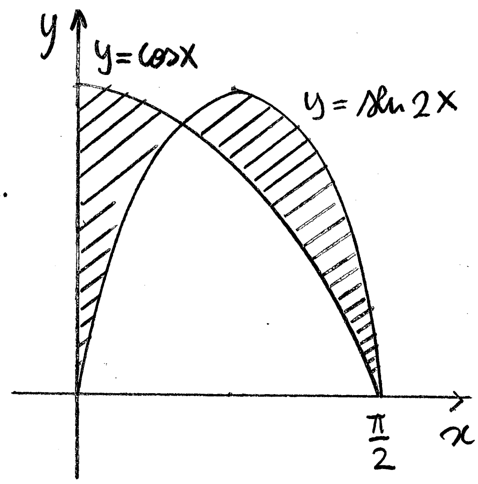
nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 4y + w - z = 2 \\ x - y + w - 2z = 3 \\ -y - 2w + 5z = -7 \\ -5x + 7y - w = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.



2) Determinare i versori **w** e ortogonali alle rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - 5y + z = 4 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione

$f(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{6}\right) - \ln(\sqrt[5]{x})$ per $x > 0$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

C

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria

5/2/16

nome ____________ cognome ____________ matr. ____________

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 4y + w - z = 2 \\ x - y + w - 2z = 3 \\ -y - 2w + 5z = -7 \\ -5x + 7y - w = -1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

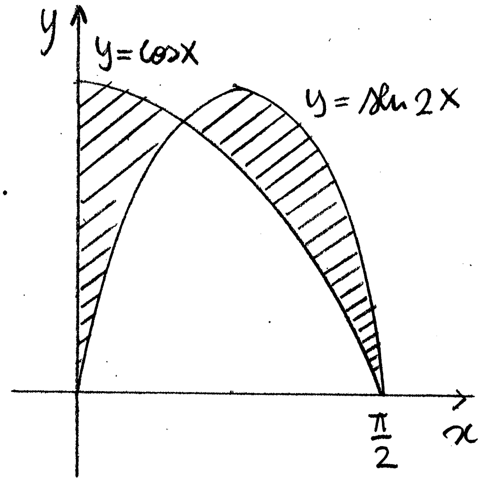
2) Determinare i versori **w** e ortogonali alle rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - 5y + z = 4 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione

$f(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{6}\right) - \ln(\sqrt[5]{x})$ per $x > 0$.

4) Calcolare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+5A_1]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -10 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4+2A_2]{A_3-A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

$\Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONE

$$\begin{cases} x - y + w - 2z = 3 \\ -y - 2w + 5z = -7 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$ RICAVIAMO

$y = 7 - 2w + 5z = 7 - 2s + 5t$

$x = y - w + 2z + 3 = 7 - 2s + 5t - s + 2t + 3$

$= 10 - 3s + 7t$

2) C2

$$r_1 \parallel \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$$
$$= -3\left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right),$$

$$r_2 \parallel \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

POICHE' $\vec{w} \perp r_1, r_2$ AVREMO:

$$\vec{w} \parallel \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 19\vec{j} - \vec{k}$$

$$\| 8\vec{i} - 19\vec{j} + \vec{k} \| = \sqrt{8^2 + (-19)^2 + (-1)^2} = \sqrt{426}$$

QUINDI:

$$\vec{w} = \pm \frac{1}{\sqrt{426}} \left(8\vec{i} - 19\vec{j} + \vec{k}\right).$$

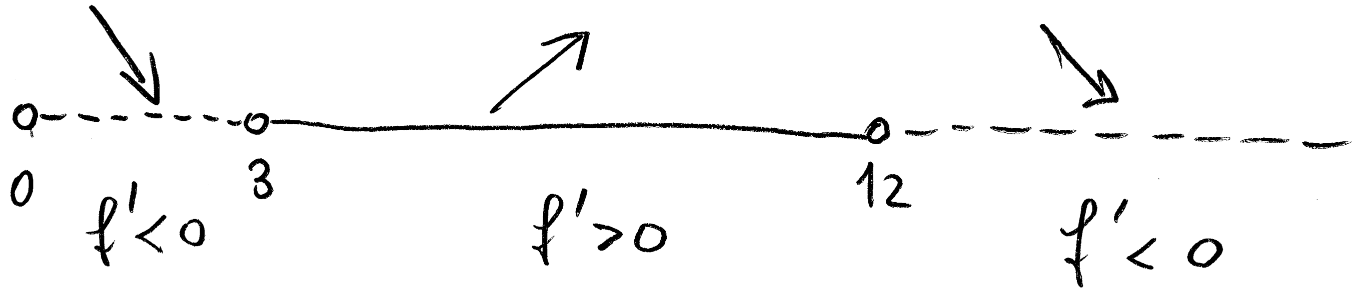
3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE PER $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{6}}{1 + \left(\frac{x}{6}\right)^2} - \frac{1}{5x} = \frac{3}{36 + x^2} - \frac{1}{5x}$$

$$= \frac{15x - x^2 - 36}{5x(36 + x^2)} = \frac{-(x-12)(x-3)}{5x\,(36 + x^2)} \quad (x > 0)$$

PER $X>0$ È CHIARO CHE

$$f'(x)>0 \iff -(x-12)(x-3)>0 :$$



$\Rightarrow$ $X=3$ MIN REL. ; $X=12$ MAX. REL

POICHE' $\lim\limits_{X\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{X\to +\infty} f(x)=-\infty$

$f(x)$ NON HA MAX O MIN ASSOLUTI.

4) DETERMINIAMO IL PUNTO DI INTERSEZIONE FRA I GRAFICI DI $y=\cos x$ E $y=\operatorname{sen} 2x$ NELL'INTERVALLO $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{cases} y=\cos x \\ y=\operatorname{sen} 2x \end{cases} \iff \cos x = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

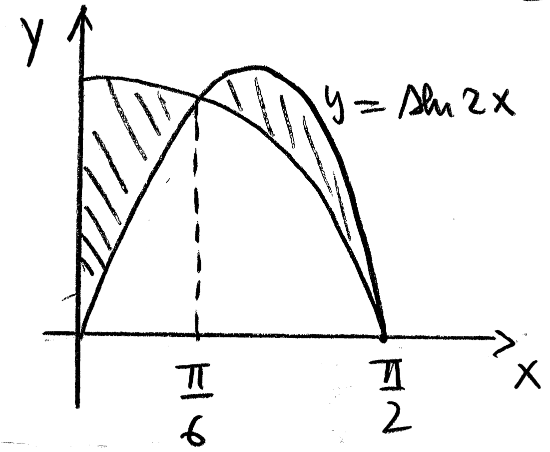
$$\iff \cos x\,(1-2\operatorname{sen} x)=0$$

LE SOLUZIONI SONO:

$$X=\frac{\pi}{2}+K\pi, \quad X=\frac{\pi}{6}+2K\pi, \quad X=\frac{5}{6}\pi+2K\pi$$

c4

E' CHIARO CHE LE SOLUZIONI IN $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ SONO ; $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$;



POICHÈ

$\cos x \geq \operatorname{sen} 2x$ IN $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$\operatorname{sen} 2x \geq \cos x$ IN $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

ABBIAMO

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \operatorname{sen} 2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} (\operatorname{sen} 2x - \cos x)\,dx$$

$$= \left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) - 1$$

$$- \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$