A_1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 31/8/17

nome ____ cognome ____ matr. ____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y + w - z = 1 \\ x - 2y + w + 3z = 2 \\ 5x - y + w + 4z = 0 \\ x - y - w + 2z = -3 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ forma angoli di 60° con il piano $\pi : x - y - z = 3$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \tan x - 2\cos x \sin x - 5x$ nell'intevallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^5 |x^2 - 4x + 3|\, dx$.

1) SCAMBIAMO LA 1ª RIGA CON LA 2ª E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - 5A_1 \\ A_4 - A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -2 & -10 & -5 \\ 0 & 9 & -4 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 - 9A_4]{A_2 - 8A_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 35 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 35 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{POI SCAMBIO } A_2 \text{ e } A_4]{A_2 - A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - 2y + w + 3z = 2 \\ y - 2w - z = -5 \\ 14w - 2z = 35 \end{cases}$$

POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$w = \frac{35 + 2t}{14},$$

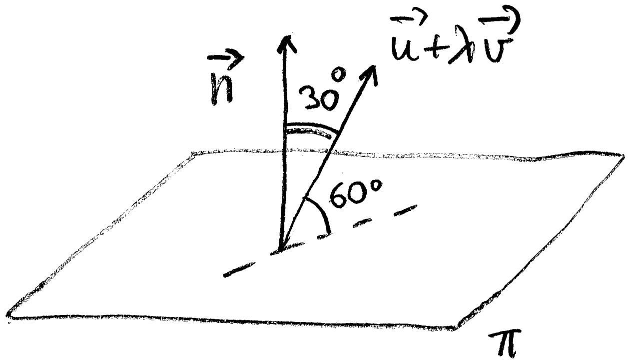
$$y = 2w + z - 5 = \frac{70 + 4t}{14} + t - 5 = \frac{9}{7}t,$$

$$x = 2y - w - 3z + 2 = \frac{18}{7}t - \frac{35 + 2t}{14} - 3t + 2 = -\frac{7 + 8t}{14}.$$

2) ABBIAMO:

$$\vec{u}+\lambda\vec{v} = (1-\lambda)\vec{i} + \lambda\vec{j} + \lambda\vec{k},$$

$$\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \quad (\text{NORMALE A } \pi)$$



$\vec{u}+\lambda\vec{v}$ FORMA UN ANGOLO DI 60° CON π SE L'ANGOLO FRA $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ E $\vec{n}$ E' DI 30° OPPURE 180°-30° = 150°. QUINDI DOVRA' ESSERE:

$$\frac{(\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot\vec{n}}{\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|\cdot\|\vec{n}\|} = \pm\cos 30°.$$

RICAVIAMO QUINDI:

$$\frac{1-3\lambda}{\sqrt{1-2\lambda+3\lambda^2}\,\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DA CUI, ELEVANDO AL QUADRATO:

$$4(1-6\lambda+9\lambda^2) = 9-18\lambda+27\lambda^2$$

$$9\lambda^2-6\lambda-5=0 \Rightarrow \lambda = \frac{6\pm\sqrt{36+180}}{18} = \frac{1\pm\sqrt{6}}{3}.$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 5 = \frac{1}{\cos^2 x} - 2(2\cos^2 x - 1) - 5$$

$$= \frac{1-3\cos^2 x - 4\cos^4 x}{\cos^2 x}.$$

QUINDI $\quad f'(x)>0 \iff 4\cos^4 x + 3\cos^2 x - 1 < 0.$

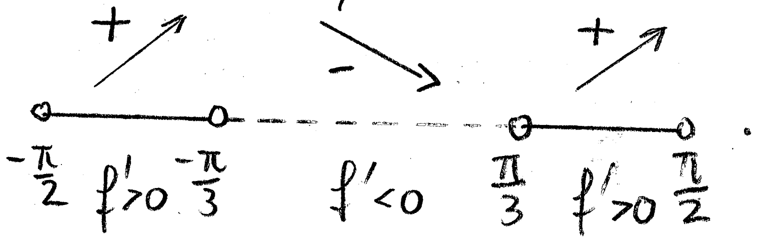
IL PRIMO MEMBRO DELLA DISEQUAZIONE E' UN POLINOMIO BIQUADRATICO IN $\cos x$ CHE SI FATTORIZZA COME

$$4(\cos^2 x+1)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right).$$

A3

SEGUE CHE

$$f'(x) > 0 \iff \cos^2 x - \frac{1}{4} < 0 \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$$



QUINDI $x = -\pi/3$ E' MAX. RELATIVO; $x = \pi/3$ È MIN. RELATIVO. POICHE' $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ E $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, NON CI SONO MAX. O MIN. ASSOLUTI.

---

4) POICHE' $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ È >0 PER $x < 1$ E PER $x > 3$, ABBIAMO:

$$\int_0^5 |x^2-4x+3|\,dx = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx - \int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$+ \int_3^5 (x^2-4x+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$+ \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_3^5 = \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - \left(\cancel{\frac{27}{3}} - \cancel{18} + \cancel{9} - \frac{1}{3} + 2 - 3\right)$$

$$+ \left(\frac{125}{3} - 50 + 15 - \cancel{\frac{27}{3}} + \cancel{18} - \cancel{9}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{125}{3} - 35\right) = \frac{127}{3} - 33 = \frac{28}{3}.$$

B_1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 31/8/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + w - z = 1 \\ x + 2y + w - 3z = 2 \\ x + y + 2w - 5z = -1 \\ -x + 2y + w - 2z = 4 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ forma angoli di 30° con il piano $\pi : x - y + 2 = 0$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = 3\tan x - 8\sin x \cos x$ nell'intevallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{-2}^{4} |x^2 - x - 2|\, dx$.

1) SCAMBIAMO LA 1^a RIGA CON LA 2^a E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+A_1]{A_2-2A_1,\ A_3-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & -5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+4A_3]{A_2-5A_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -13 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{POI SCAMBIO } A_2 \text{ E } A_3]{A_4+A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 4 \Rightarrow \infty^{4-4} = \infty^0$ SOLUZIONI, CIOE' UN'UNICA SOLUZIONE. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x + 2y + w - 3z = 2 \\ -y + w - 2z = -3 \\ -6w + 15z = 12 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

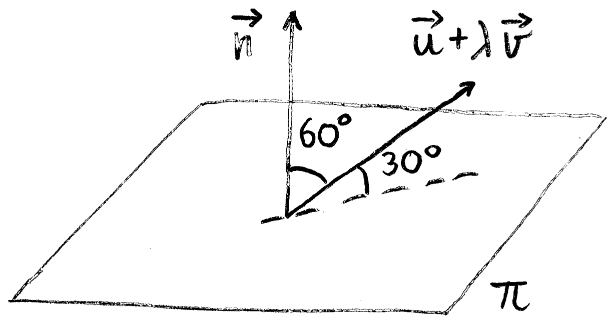
$z = \frac{6}{2} = 3$

$w = \frac{15z - 12}{6} = \frac{11}{2}$

$y = w - 2z + 3 = \frac{11}{2} - 6 + 3 = \frac{5}{2}$

$x = 2 + 3z - 2y - w = 2 + 9 - \frac{10}{2} - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}$.

2) ABBIAMO:



$$\vec{u}+\lambda\vec{v} = (1-\lambda)\vec{i} + \lambda\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{(NORMALE A } \pi\text{)}$$

$\vec{u}+\lambda\vec{v}$ FORMA UN ANGOLO DI 30° CON π SE L'ANGOLO FRA $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ E $\vec{n}$ E' DI 60° OPPURE $180°-60°=120°$. QUINDI DOVRA' ESSERE

$$\frac{(\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot\vec{n}}{\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|\,\|\vec{n}\|} = \pm\cos 60° \Rightarrow \frac{1-2\lambda}{\sqrt{5-2\lambda+2\lambda^2}\,\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2}.$$

ELEVANDO AL QUADRATO E SEMPLIFICANDO SI HA:

$$2(1-2\lambda)^2 = 5-2\lambda+2\lambda^2$$

$$6\lambda^2-6\lambda-3=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4} = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}).$$

$$\underline{\underline{2\lambda^2-2\lambda-1=0}}$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - 8(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{\cos^2 x} - 8(2\cos^2 x - 1)$$

$$= \frac{3+8\cos^2 x - 16\cos^4 x}{\cos^2 x}.$$

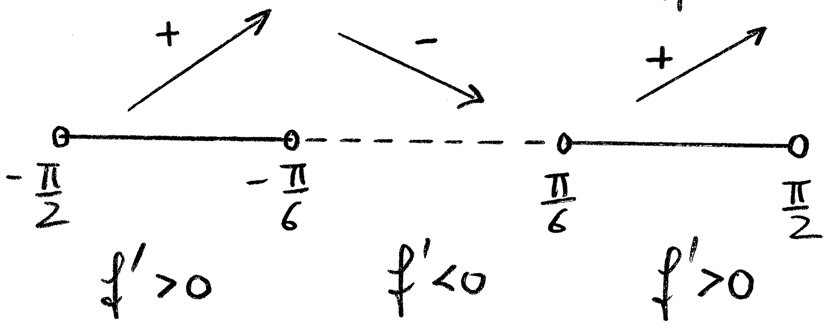
QUINDI $f'(x)>0 \iff 16\cos^4 x - 8\cos^2 x - 3 < 0$

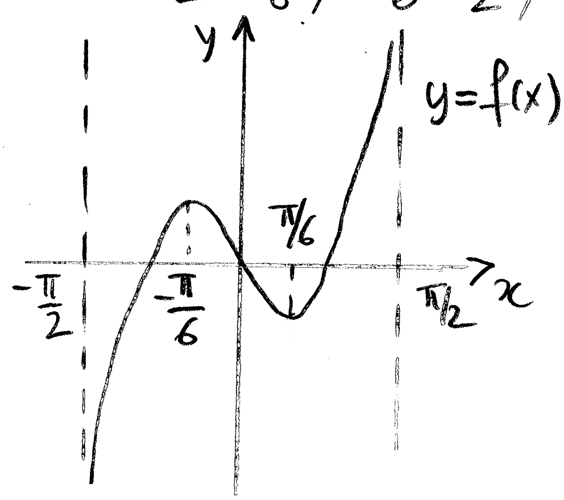
IL PRIMO MEMBRO DELLA DISEQUAZIONE E' UN POLINOMIO BIQUADRATICO IN $\cos x$ CHE SI FATTORIZZA COME

$$16\left(\cos^2 x + \frac{1}{4}\right)\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)$$

QUINDI IN $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ SI HA:

$$f'(x)>0 \iff \cos^2 x-\frac{3}{4}<0 \iff x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$$





QUINDI $x=-\frac{\pi}{6}$ E' MAX. REL.

$x=\frac{\pi}{6}$ E' MIN. REL.

POICHE' $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$ NON CI SONO MAX E MIN. ASSOLUTI.

4) POICHE' $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ E' >0 PER $x<-1$ E PER $x>2$, ABBIAMO:

$$\int_{-2}^{4}|x^2-x-2|\,dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)\,dx-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx$$

$$+\int_{2}^{4}(x^2-x-2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}$$

$$+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{4}=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cancel{2}+\frac{8}{3}+\cancel{2}-\cancel{4}\right)$$

$$-\left(\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{64}{3}-8-8-\frac{8}{3}+2+4\right)$$

$$=\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-5\right)+\left(\frac{56}{3}-10\right)=\frac{63}{3}-6=15.$$

C_1

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 31/8/17

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3w = -3 \\ x - y - 2w - z = -1 \\ 2x - 3y - w + z = -2 \\ -x + 5w + 4z = 1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$, determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ forma angoli di 45° con il piano $\pi : y - z + 4 = 0$.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = 3\cot x - 8\sin x \cos x$ nell'intevallo $(0, \pi)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{-1}^{5} |3x - x^2|\, dx$.

1) SCAMBIAMO LA 1^a RIGA CON LA 2^a E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3-2A_1 \\ A_4+A_1}]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - y - 2w - z = -1 \\ -y + 3w + 3z = 0 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$ CON $s, t \in \mathbb{R}$, ABBIAMO:

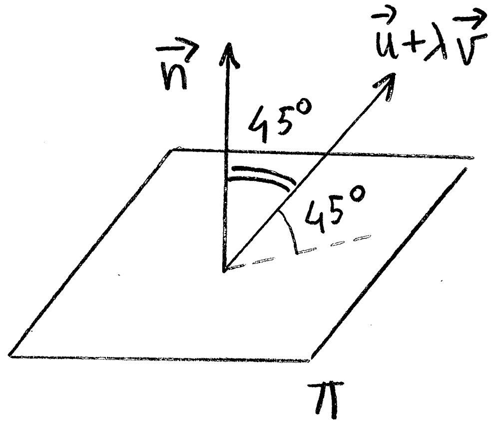
$y = 3w + 3z = 3s + 3t$

$x = y + 2w + z - 1 = 3s + 3t + 2s + t - 1 = 5s + 4t - 1.$

2) ABBIAMO:

$\vec{u}+\lambda\vec{v} = 2\vec{i} + (1-\lambda)\vec{j} + \lambda\vec{k}$

$\vec{n} = \vec{j} - \vec{k}$ (NORMALE A π)



$\vec{u}+\lambda\vec{v}$ FORMA UN ANGOLO DI $45°$ CON π SE L'ANGOLO FRA $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ E $\vec{n}$ E' DI $45°$ OPPURE $135°$. QUINDI DOVRA' ESSERE:

$$\frac{(\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot\vec{n}}{\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|\,\|\vec{n}\|} = \pm\cos 45° \Rightarrow \frac{1-2\lambda}{\sqrt{5-2\lambda+2\lambda^2}\,\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

DA CUI, ELEVANDO AL QUADRATO E SEMPLIFICANDO, TROVIAMO:

$$1-4\lambda+4\lambda^2 = 5-2\lambda+2\lambda^2$$
$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=-1 \text{ OPPURE } \lambda=2.$$

3) $f(x)$ E' DEFINITA E DERIVABILE IN $(0,\pi)$:

$$f'(x) = \frac{-3}{\operatorname{sen}^2 x} - 8(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \frac{-3}{\operatorname{sen}^2 x} - 8(1-2\operatorname{sen}^2 x)$$
$$= \frac{16\operatorname{sen}^4 x - 8\operatorname{sen}^2 x - 3}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

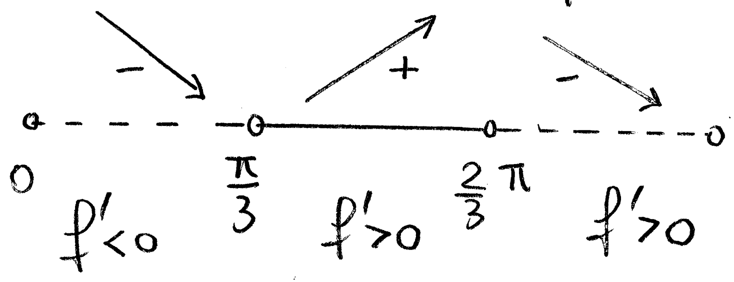
QUINDI $f'(x)>0 \Leftrightarrow 16\operatorname{sen}^4 x - 8\operatorname{sen}^2 x - 3 > 0$

IL PRIMO MEMBRO DELLA DISEQUAZIONE E' UN POLINOMIO BIQUADRATICO IN $\operatorname{sen} x$ CHE SI FATTORIZZA COME

$$16\left(\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{3}{4}\right)$$

QUINDI IN $(0,\pi)$ ABBIAMO:

$$f'(x)>0 \iff \sin^2 x-\frac{3}{4}>0 \iff x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right)$$



$\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{3}$ MIN. REL.

$x=\frac{2}{3}\pi$ MAX REL.

POICHE' $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\pi^-} f(x)=-\infty$, $f(x)$ NON HA MAX E MIN. ASSOLUTI.

4) POICHE' $3x-x^2=x(3-x)$ E' >0 PER $x\in(0,3)$, SI HA:

$$\int_{-1}^{5}|3x-x^2|\,dx=-\int_{-1}^{0}(3x-x^2)\,dx+\int_{0}^{3}(3x-x^2)\,dx$$

$$-\int_{3}^{5}(3x-x^2)\,dx=-\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}$$

$$-\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{3}^{5}=-\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{27}{2}-9\right)$$

$$-\left(\frac{75}{2}-\frac{125}{3}-\frac{27}{2}+9\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{27}{2}-9-\frac{48}{2}+\frac{125}{3}-9=-\frac{18}{2}+\frac{126}{3}-18$$

$$=15.$$