Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 17/2/14 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+y+2w-3z=0 \\ x-y+w-z=1 \\ x-2y+2w-z=-2 \\ 3x-2y+5w-4z=-5 \end{cases}$$

2) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $||\vec{u}||=4$, $||\vec{v}||=2$, $||\vec{u}-\vec{v}||=4$, determinare la norma del vettore $\frac{1}{2}\vec{u}\wedge 3\vec{v}$.

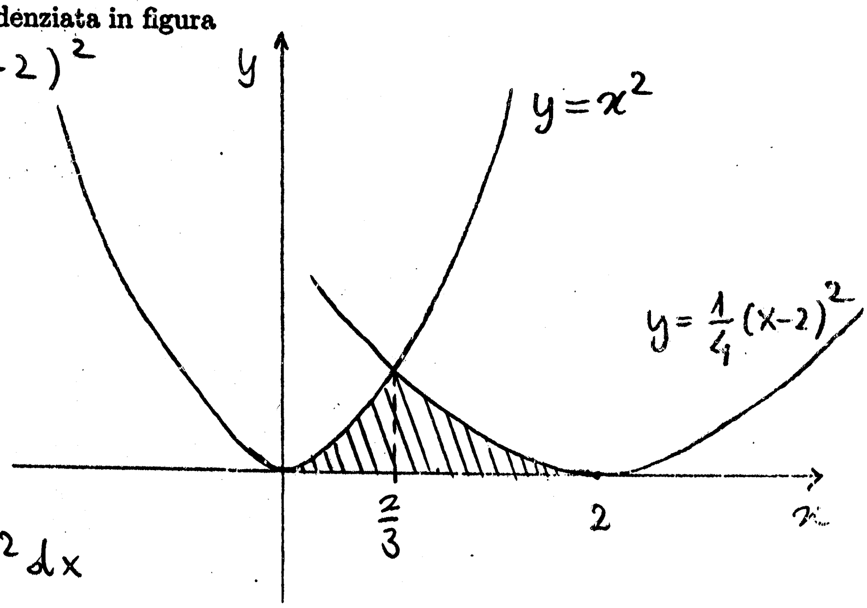
3) Determinare massimi e minimi (relativi e/o assoluti) della seguente funzione: $f(x)=4\sin^3 x+3\cos x$ nell'intervallo $[0,\pi]$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura

4) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{1}{4}(x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow 4x^2=(x-2)^2$

$\Longleftrightarrow \quad 2x=\pm(x-2)$

$x=-2, \quad x=\frac{2}{3}$



$$A=\int_0^{\frac{2}{3}} x^2\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{4}(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{2}{3}}^{2}=\frac{8}{81}+\frac{1}{4}\,\frac{64}{81}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$$

---

2) $$||\vec{u}-\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos\theta$$

$$\cancel{16}=\cancel{16}+4-2\cdot 4\cdot 2\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\left\|\frac{1}{2}\vec{u}\wedge 3\vec{v}\right\|=\frac{3}{2}\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\frac{3}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$$

A

1) SCAMBIAMO PRIMA E SECONDA RIGA E RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-3A_1]{A_2-2A_1,\ A_3-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+A_3]{A_2+3A_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - y + w - z = 1 \\ -y + w = -3 \\ 3w - z = -11 \end{cases}$$

POSTO $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$w = \frac{z-11}{3} = \frac{t-11}{3}$$

$$y = w + 3 = \frac{t-2}{3}, \quad x = 1 + y - w + z = 1 + \frac{t-2}{3} - \frac{t-11}{3} + t = 4 + t$$

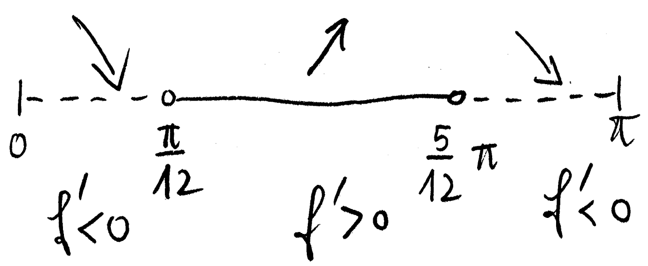
---

3) $f'(x) = 12 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 3 \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x (4 \cos x \operatorname{sen} x - 1)$

$= 3 \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} 2x - 1)$

POICHE' $\operatorname{sen} x > 0$ IN $(0, \pi)$, $f'(x) > 0$ IN $(0, \pi)$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5}{12}\pi$



MIN REL. IN $\frac{\pi}{12}$, π

MAX REL IN 0, $\frac{5}{12}\pi$

$f(\frac{\pi}{12}) > 0$, $f(\pi) = -3$

$\Rightarrow x = \pi$ MIN. ASSOLUTO.

$f(0) = 3$, $f(\frac{5}{12}\pi) > 3$

$\Rightarrow x = \frac{5}{12}\pi$ MAX. ASSOLUTO.

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 17/2/14 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

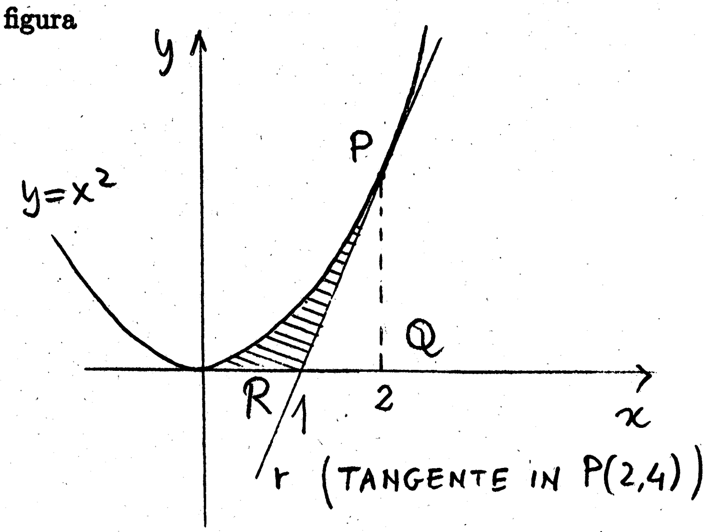
1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 3y + 2w - z = 2 \\ -x - 5y - 2w + 5z = -4 \\ x + y + 2w - 3z = 3 \\ x - 7y + 2w + z = 1 \end{cases}$$

2) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sul piano π di equazione $x - 2y + z = 5$.

3) Determinare massimi e minimi (relativi, assoluti) della funzione $f(x) = x\sqrt{8 - 2x^2}$ per $x \in [-2, 2]$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura



4) RETTA TANG. IN (2,4):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 4 + 4(x-2) = 4x - 4$$

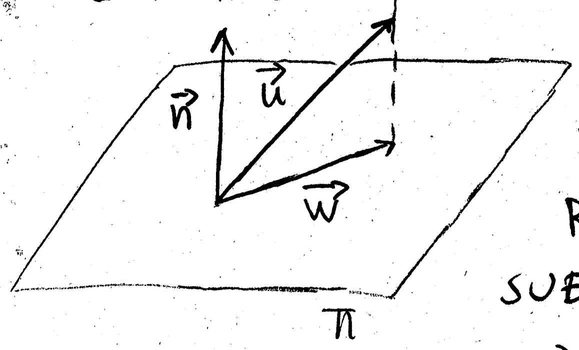
$y = 0$ per $x = 1$.

$$A = \int_0^2 x^2\,dx - \text{Area } PQR$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \frac{1 \cdot 4}{2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

---

2) IL PIANO π È $\perp$ AL VETTORE $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$



LA PROIEZIONE, $\vec{w}$, DEL VETTORE $\vec{u}$ SUL PIANO π SI RICAVA SCOMPONENDO $\vec{u}$ NELLE SUE COMPONENTI $\perp$ E // A $\vec{n}$:

$$\vec{w} = \vec{u} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) - \frac{5}{6}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$= \frac{7}{6}\vec{i} + \frac{4}{6}\vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k}.$$

1) RIDUCIAMO A SCALA: B

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -7 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - A_1]{A_2 + A_1,\ A_3 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 + A_3]{A_2 + 2A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|B) = 2 \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x - 3y + 2w - z = 2 \\ 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$

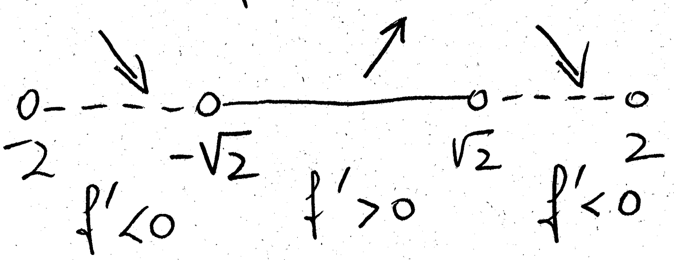
$$y = \frac{1+2z}{4} = \frac{1+2t}{4}$$

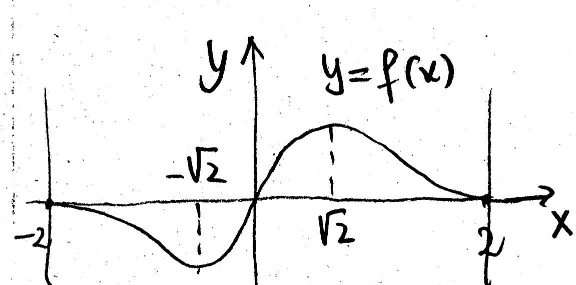
$$x = 2 + 3y - 2w + z = 2 + 3 \cdot \frac{1+2t}{4} - 2s + t = \frac{11}{4} + \frac{5}{2}t - 2s$$

---

3) $f'(x) = \sqrt{8-2x^2} - x \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{8-2x^2}} = \dfrac{8-4x^2}{\sqrt{8-2x^2}}$ IN $(-2, 2)$

QUINDI $f'(x) > 0 \iff x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$





$x = -\sqrt{2}, 2$ MIN. REL.

$x = \sqrt{2}, -2$ MAX. REL.

POICHE' $f(-2) = f(2) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$ E' MAX. ASSOLUTO

$x = -\sqrt{2}$ E' MIN. ASSOLUTO

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 17/2/14

C

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+5y+w-z=1 \\ x-2y-3w-z=3 \\ -x-y+2w-3z=-2 \\ x+2y-5z=2 \end{cases}$$

2) Determinare $\lambda \in \mathbf{R}$ in modo che il parallelepipedo individuato dai tre vettori $\vec{u} = \mathbf{i} - \lambda\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\vec{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$, $\vec{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ abbia volume $V = 2$.

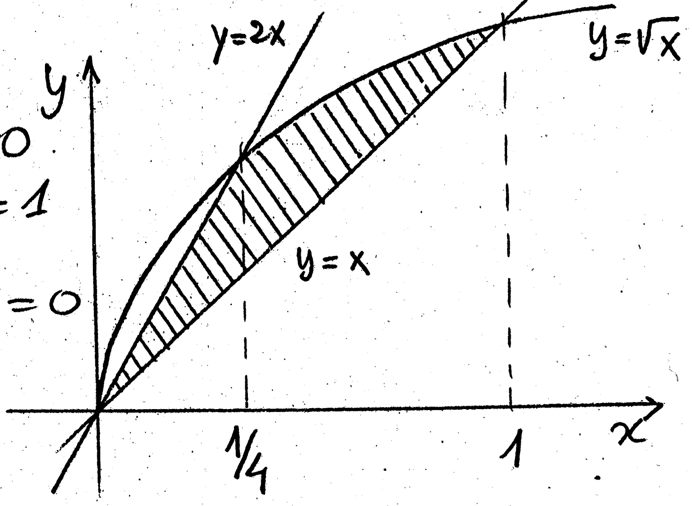
3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$ nell'intervallo $[-4, 5]$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura.

4) INTERSEZIONI

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x \end{cases} \iff x=\sqrt{x} \iff x^2-x=0$$

$x=0,\ x=1$



$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=2x \end{cases} \iff 2x=\sqrt{x} \iff 4x^2-x=0$$

$x=0,\ x=\frac{1}{4}$

$$A = \int_0^{\frac{1}{4}} (2x-x)\,dx + \int_{1/4}^{1} (\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/4}^{1} = \frac{1}{32} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{7}{48}$$

---

2)

$$V = \left|\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 3 \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = |\lambda^2+3-1+3\lambda| = |\lambda^2+3\lambda+2|$$

$$V=2 \iff |\lambda^2+3\lambda+2| = 2$$

$\lambda^2+3\lambda+2 = 2$

$\lambda^2+3\lambda+2 = -2$

$\lambda^2+3\lambda=0 \iff \lambda=0,\ \lambda=-3.$

$\lambda^2+3\lambda+4=0$ NON AMMETTE SOLUZIONI.

C

1) RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3+A_1 \\ A_4-A_1}]{A_2-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+A_4]{A_2-2A_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+3A_3]{A_2+A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -28 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -28 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|B) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x + 5y + w - z = 1 \\ y + 2w - 8z = 0 \\ 5w - 28z = 1 \end{cases} \qquad z = t \qquad w = \frac{1+28t}{5}$$

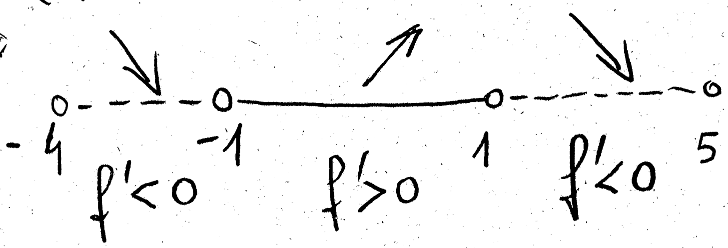
$$y = -2w + 8z = \frac{-2-56t}{5} + 8t = -\frac{2+16t}{5}$$

$$x = 1 - 5y - w + z = 1 + 5 \cdot \frac{2+16t}{5} - \frac{1+28t}{5} + t = \frac{14+57t}{5}$$

---

3) $$f'(x) = \frac{1+x+x^2 - x(2x+1)}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x+x^2}, \quad \forall x.$$

POICHE' $1+x+x^2 > 0 \ \forall x$, $f'(x) > 0 \iff 1 - x^2 > 0$ $\iff -1 < x < 1$



$x = -1$, $x = 5$ MIN. REL.

$x = -4$, $x = 1$ MAX. REL.

POICHE'

$f(1) = \frac{1}{3}$, $f(-1) = -1$

$f(-4) = -\frac{4}{13}$, $f(5) = \frac{5}{31}$

$x = -1$ MIN. ASSOLUTO

$x = 1$ MAX. ASSOLUTO

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

D

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -x - 2y + w + z = -1 \\ x - y + 4w + 3z = 3 \\ 3y + w - 4z = 4 \\ -3x - w + 3z = -1 \end{cases}$$

2) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 3$, determinare la norma del vettore $2\vec{u} + \vec{v}$.

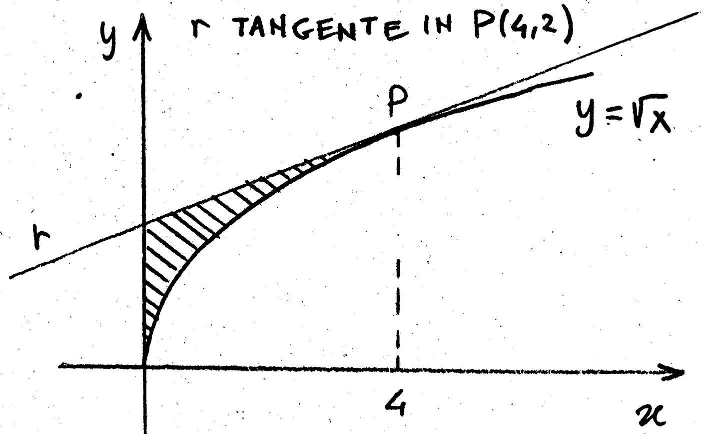
3) Determinare massimi e minimi (relativi e/o assoluti) della seguente funzione: $f(x) = x\,2^{-x^2}$ per $x \in \mathbf{R}$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura

4) RETTA TANG.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\stackrel{!}{=} 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) = 1 + \frac{x}{4}$$



$$A = \int_0^4 \left(1 + \frac{x}{4} - \sqrt{x}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{8} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4$$

$$= 4 + 2 - \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{2}{3}$$

---

2) $$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$9 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\|2\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|2\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|2\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\stackrel{!}{=} 16 + 9 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \, \frac{1}{3} = 33$$

$$\|2\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{33}$$

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI D

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-3A_1]{A_2+A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4+2A_2]{A_3+A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 4$

IL SISTEMA HA SOLUZIONE UNICA.

$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-1 \\ -3y+5w+4z=2 \\ 6w=6 \\ 8z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z=0 \\ w=1 \\ y = \dfrac{5w+4z-2}{3} = 1 \\ x = 1-2y+w+z = 0 \end{array}$$

---

3) $f'(x) = 2^{-x^2} - x\cdot(2x)\ln 2 \cdot 2^{-x^2}$

$= 2^{-x^2}\left(1-x^2\ln 4\right)$

$\Rightarrow f'(x)>0 \iff x^2 < \dfrac{1}{\ln 4} \iff -\dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}}$

$f'<0$ $\quad$ $f'>0$ $\quad$ $f'>0$

POICHE'

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$x = -1/\sqrt{\ln 4}$ MIN. REL E ASSOLUTO

$x = 1/\sqrt{\ln 4}$ MAX REL. E ASSOLUTO