Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria

10/6/16

nome ______ cognome ______ matr. ______

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) **Dato il sistema lineare**

$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-1 \\ 3x+5y-3w-2z=5 \\ -x-3y+w+2z=1 \\ 5x+8y-5w-3z=9 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) **Determinare** l'angolo formato dalla retta $r: \begin{cases} x-y-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ con la sua proiezione (ortogonale) sul **piano** π passante per $P(-2,0,1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}=-\mathbf{i}-5\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

3) **Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione** $f(x)=\ln x+2\arctan(2-2x)$.

4) **Calcolare il seguente integrale definito:** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}(\tan^3 x+\tan^5 x)\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & -5 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3-A_1 \\ A_4+5A_1}]{A_2+3A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4-2A_2]{A_3-A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A)=\text{car}(A|B)=2$

IL SISTEMA AMMETTE ∞^2 SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} -x-2y+w+z=-1 \\ -y+z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

POSTO $w=s$, $z=t$

$y=z-2=t-2$

$x=1-2y+w+z=1-2t+4+s+t=5+s-t.$

LA SOLUZIONE E' QUINDI DATA DA:

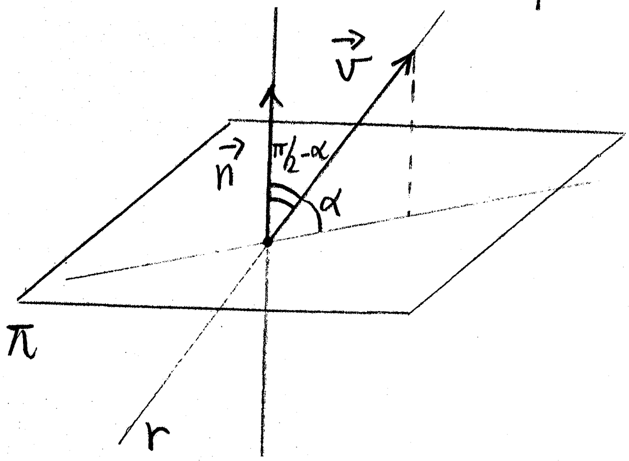
$(5+s-t,\ t-2,\ s,\ t)$ AL VARIARE DI s,t IN $\mathbb{R}$.

2) LA RETTA r E' PARALLELA AL VETTORE

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

IL PIANO π E' ORTOGONALE AL VETTORE

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$



INDICATO CON α L'ANGOLO ACUTO FRA r E LA SUA PROIEZIONE SUL PIANO, ABBIAMO

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{|16 - 6 - 6|}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{7 \cdot 8} \cdot \sqrt{2 \cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{91}}.$$

3) $f(x) = \ln x + 2 \operatorname{arctang}(2-2x)$

QUINDI $f(x)$ E' DEFINITA PER $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1+(2-2x)^2}(-2) = \frac{4x^2 - 12x + 5}{x\left[1+(2-2x)^2\right]}$$

$$= \frac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)}{x \cdot \left[1+(2-2x)^2\right]} \qquad \text{PER } x > 0.$$

STUDIAMO ORA IL SEGNO DI $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

$f'(x)$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	
		>0 $\nearrow$		<0 $\searrow$		>0 $\nearrow$

$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$ MAX RELATIVO, $x = \frac{5}{2}$ MIN. RELATIVO.

POICHE' $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, NON CI SONO MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI.

4) $$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\tan^3 x + \tan^5 x\right) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan^3 x \left(1 + \tan^2 x\right) dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan^3 x \, (\tan x)' \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tan^4 \frac{\pi}{4} - \tan^4 \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4\right) = \frac{2}{9}.$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 10/6/16

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x-2y+w+z=-1 \\ 4x+5y-4w-2z=1 \\ -4x-3y+2z=-3 \\ 6x+8y-7w-3z=1 \end{cases}$$

ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni.

3) Determinare l'angolo formato dalla la retta $r: \begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$ con la sua proiezione (ortogonale) sul piano π passante per $Q(1,-1,2)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln^2 x-2}$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\cot x+\cot^3 x)\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3-2A_1 \\ A_4+3A_1}]{A_2+2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4-2A_2]{A_3-A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A)=\operatorname{car}(A|B)=2$

$\Rightarrow \infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} -2x-2y+w+z=-1 \\ y-2w=-1 \end{cases}$$

POSTO $w=s$, $z=t$,

$y=2w-1=2s-1$

$x=\frac{1}{2}-y+\frac{w}{2}+\frac{z}{2}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}s+\frac{3}{2}$

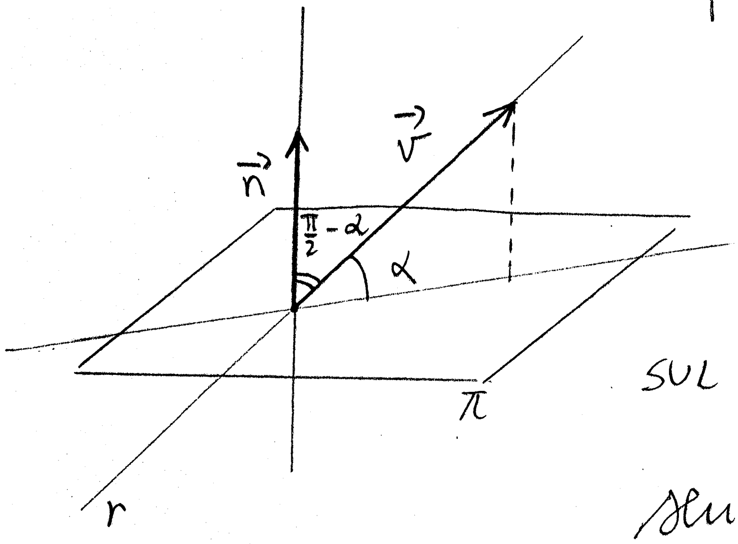
LA SOLUZIONE E' QUINDI DATA DA

$\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{2}s+\frac{3}{2},\ 2s-1,\ s,\ t\right)$ AL VARIARE DI $s,t\in\mathbb{R}$.

2)

$r \parallel \vec{v}$ con $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\pi \perp \vec{n}$ con $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$



INDICATO CON α L'ANGOLO ACUTO FRA r E LA SUA PROIEZIONE ORTOGONALE SUL PIANO π, ABBIAMO:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{|-3-9+15|}{\sqrt{35}\,\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{105}}.$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln^2 x - 2}$ E' DEFINITA PER OGNI $x>0$ TALE CHE $\ln^2 x \neq 2$:

$x>0$, $x \neq e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}$.

NEL DOMINIO DI DEFINIZIONE ABBIAMO:

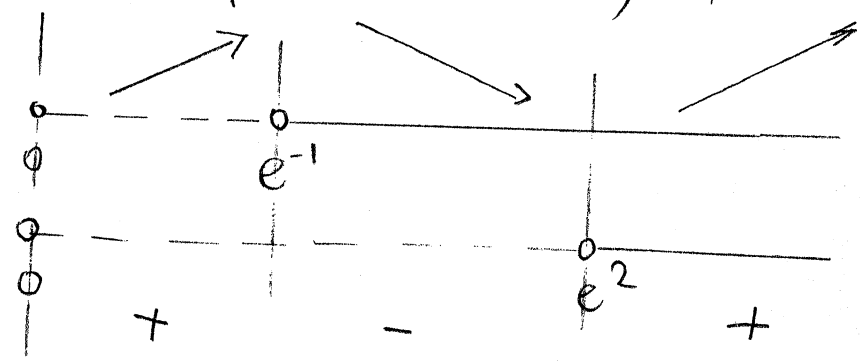
$$f'(x) = \frac{2x(\ln^2 x - 2) - x^2\, 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x - 2)^2} = \frac{2x(\ln^2 x - \ln x - 2)}{(\ln^2 x - 2)^2} = \frac{2x(\ln x - 2)(\ln x + 1)}{(\ln^2 x - 2)^2}$$

STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$ PER $x>0$, $x \neq e^{\pm\sqrt{2}}$

2.3

$\ln x + 1 > 0$

$\ln x - 2 > 0$



QUINDI $f'(x) > 0$ IN $(0, e^{-1}) \cup (e^2, +\infty)$, $x \neq e^{\pm\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $x = e^{-1}$ MAX. REL.

$x = e^2$ MIN REL.

NON SONO ESTREMI ASSOLUTI PERCHÉ, AD ESEMPIO,

$$\lim_{x \to (e^{-\sqrt{2}})^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to (e^{-\sqrt{2}})^+} f(x) = -\infty .$$

$x = e^{-\sqrt{2}}$, $x = e^{\sqrt{2}}$ SONO ASINTOTI VERTICALI.

---

4) $$\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\operatorname{coteng} x + \operatorname{coteng}^3 x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} \operatorname{coteng} x \,(1 + \operatorname{coteng}^2 x)\,dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{coteng} x \,(\operatorname{coteng} x)'\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{coteng}^2 x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{coteng}^2 \frac{\pi}{2} - \operatorname{coteng}^2 \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0 - (\sqrt{3})^2\right) = \frac{3}{2} .$$