Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 9/2/15 A

nome ____ cognome ____ matr. ____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + w + z = -1 \\ -2x - y + 3w + 2z = 2 \\ x - 2y + 4w + 3z = 1 \\ -x - 3y + 7w + 5z = 3 \end{cases}$$

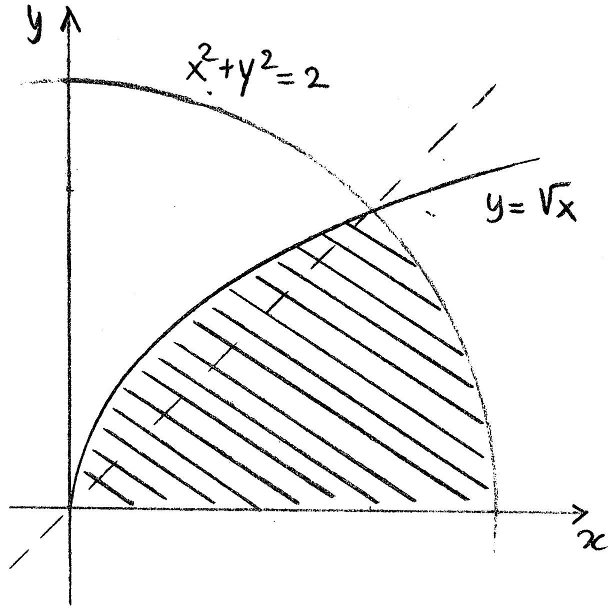
2) Determinare l'equazione del piano π parallelo alle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad r_2 : x - 3 = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

ed equidistante da esse.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x) = \arctan(x^2) - \ln(1 + x^4)$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO 1ª E 3ª RIGA E RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - 3A_1 \\ A_4 + A_1}]{A_2 + 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & 11 & 8 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - A_2]{A_3 + A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

car(A) = car$(A|B) = 2$

$\Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x - 2y + 4w + 3z = 1 \\ -5y + 11w + 8z = 4 \end{cases}$$

POSTO $w = h$, $z = k$

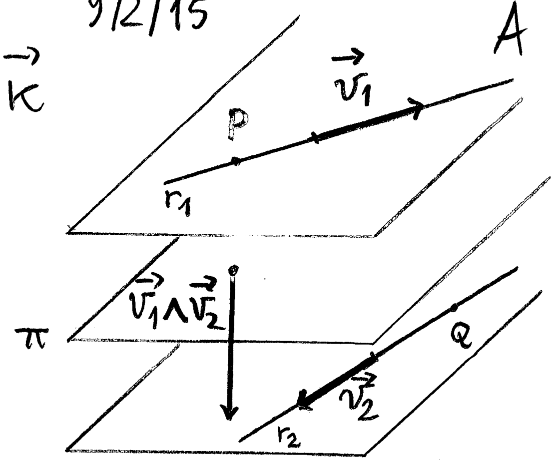
$$y = \frac{11h + 8k - 4}{5}$$

$$x = 1 + 2y - 4w - 3z = 1 + \frac{22}{5}h + \frac{16}{5}k - \frac{8}{5} - 4h - 3k$$

$$= \frac{2}{5}h + \frac{1}{5}k - \frac{3}{5}$$

SOLUZIONE: $\left(\frac{2h + k - 3}{5}, \frac{11h + 8k - 4}{5}, h, k\right)$, $h, k \in \mathbb{R}$

2) 9/2/15 A



$r_1 \parallel \vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $r_2 \parallel \vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

IL PIANO $\pi \parallel r_1, r_2$ E'
ORTOGONALE A $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$\Rightarrow \pi$ HA EQUAZIONE DELLA FORMA $x + y + d = 0$

DETERMINIAMO IL TERMINE NOTO IMPONENDO CHE π SIA EQUIDISTANTE DALLE DUE RETTE

POICHE' $P = (3, 1, 0) \in r_1$, $Q = (3, 4, 1) \in r_2$

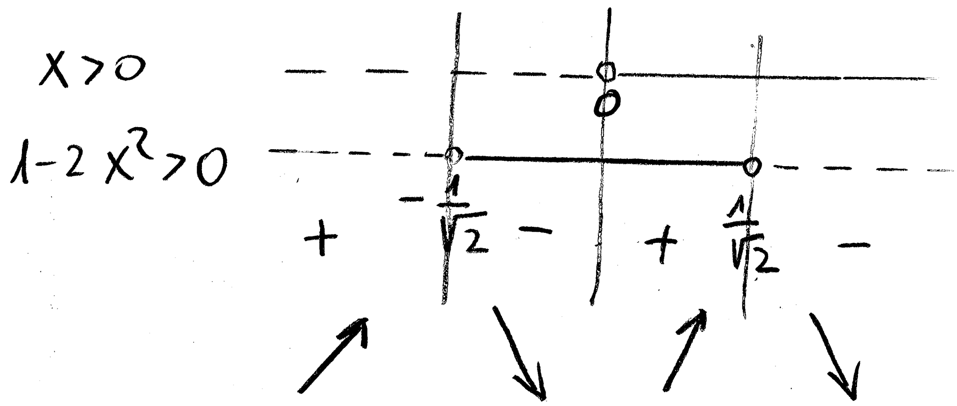
DOVRA' ESSERE

$$\frac{|3+1+d|}{\sqrt{2}} = \frac{|3+4+d|}{\sqrt{2}} \iff |4+d| = |7+d| \Rightarrow d = -\frac{11}{2}$$

IL PIANO CERCATO HA EQUAZIONE $2x + 2y - 11 = 0$.

3) $$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{2x(1-2x^2)}{1+x^4}$$

QUINDI $f'(x) > 0 \iff x(1-2x^2) > 0$



- $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ MAX. REL. (ASSOLUTO IN $[0, \infty)$)
- $x = 0$ MIN. REL.
- $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ MAX. REL. (ASSOLUTO IN $(-\infty, 0]$)

POICHE' $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, $f(x)$ NON HA MIN. ASSOLUTO.

POICHE' $f(x)$ E' PARI $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ SONO MAX. ASSOLUTI.

9/2/15

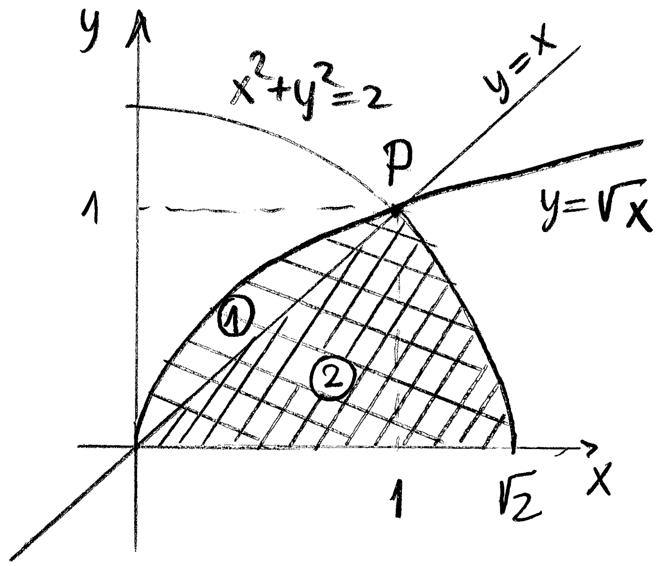
A

4) DETERMINIAMO L'INTERSEZIONE P FRA LA CIRCONFERENZA E IL GRAFICO DI $y=\sqrt{x}$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x=1$

QUINDI $P=(1,1)$ SI TROVA SULLA RETTA $y=x$.



$$A_{REA} \underset{\substack{①\\\downarrow}}{} = \overset{\substack{②\\\downarrow}}{\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8}} + \overset{\substack{①\\\downarrow}}{\int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 9/2/15 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

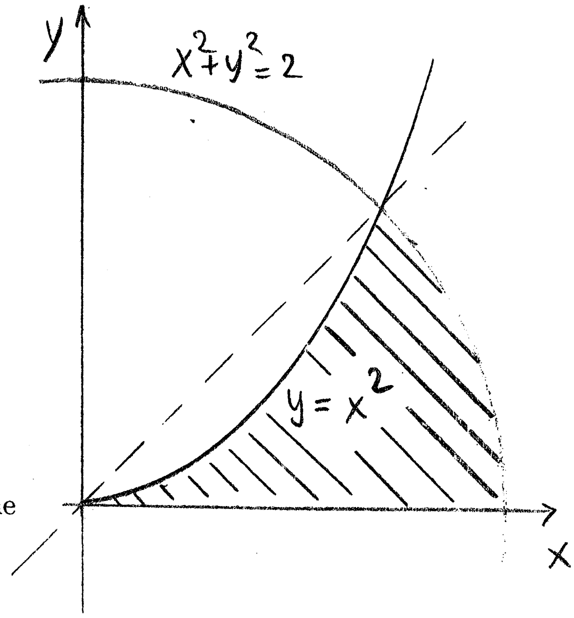
$$\begin{cases} x-y+w+z=-2 \\ -2x-y+3w+2z=1 \\ -x-2y+4w+3z=-1 \\ -3x-3y+7w+5z=0 \end{cases}$$

2) Determinare l'equazione della perpendicolare comune alle rette

$$r_1 \begin{cases} x=3+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x=3+s \\ y=5-s \\ z=-s \end{cases}$$

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti della funzione $f(x)=3\cos x-2\cos^3 x$ nell'intervallo $[0,\pi]$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3+A_1 \\ A_4+3A_1}]{A_2+2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-2A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{car}(A)=\operatorname{car}(A|B)=2$

$\Rightarrow \infty^{4-2}=\infty^2$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x-y+w+z=-2 \\ -3y+5w+4z=-3 \end{cases}$$

POSTO $w=h$, $z=k$

$$y=\frac{3+5h+4k}{3}$$

$$x=y-w-z-2=1+\frac{5}{3}h+\frac{4}{3}k-h-k-2$$

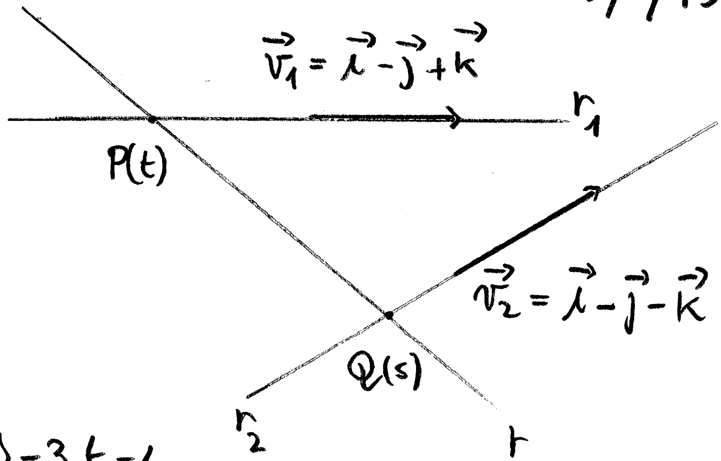
$$\stackrel{!}{=} \frac{2}{3}h+\frac{1}{3}k-1$$

SOLUZIONE:

$$\left(\frac{2}{3}h+\frac{k}{3}-1,\ 1+\frac{5}{3}h+\frac{4}{3}k,\ h,\ k\right),\quad h,k\in\mathbb{R}.$$

9/2/15 B

2)



$\vec{PQ} = (s-t)\vec{i} + (4+t-s)\vec{j} - (s+t)\vec{k}$

$r \perp r_1, r_2 \iff \begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$

$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = s - t - 4 - t + \cancel{s} - \cancel{s} - t = s - 3t - 4$

$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_2 = s - t - 4 - \cancel{t} + s + s + \cancel{t} = 3s - t - 4$

DETERMINIAMO s, t RISOLVENDO IL SISTEMA

$\begin{cases} s - 3t = 4 \\ 3s - t = 4 \end{cases} \implies s = 1, \quad t = -1$

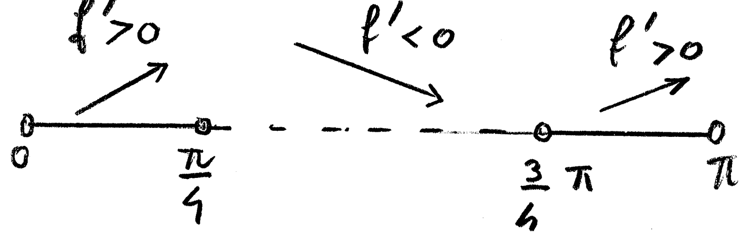
LA PERPENDICOLARE COMUNE PASSA QUINDI PER

$P(-1) = (2, 2, -1)$, $Q(1) = (4, 4, -1)$ E HA EQUAZIONE

$r: \quad x = y, \quad z = -1$

3) $f'(x) = -3 \operatorname{sen} x + 6 \cos^2 x \operatorname{sen} x = 6 \operatorname{sen} x \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right)$

QUINDI IN $(0, \pi)$ $f'(x) > 0 \iff \cos^2 x > \frac{1}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 0, \quad x = \frac{3}{4}\pi$ MINIMI RELATIVI

$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \pi$ MASSIMI RELATIVI

POICHE' $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$ E' MAX ASSOLUTO

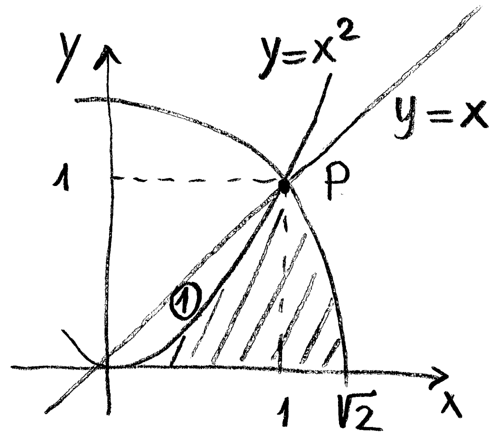
$x = \frac{3\pi}{4}$ E' MIN. ASSOLUTO

4) DETERMINIAMO L'INTERSEZIONE P FRA LA PARABOLA E LA CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases} \iff x^4+x^2-2=0 \iff (x^2+2)(x^2-1)=0$$

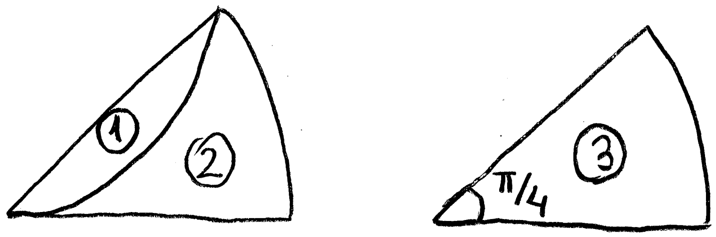
$$\Rightarrow \quad x=1, \quad x=-1$$

QUINDI IL PUNTO P IN FIGURA HA COORDINATE (1,1)



$$\text{AREA} = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8} - \int_0^1 \overset{①}{(x-x^2)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}.$$



$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8} = \frac{\pi}{4}$$

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

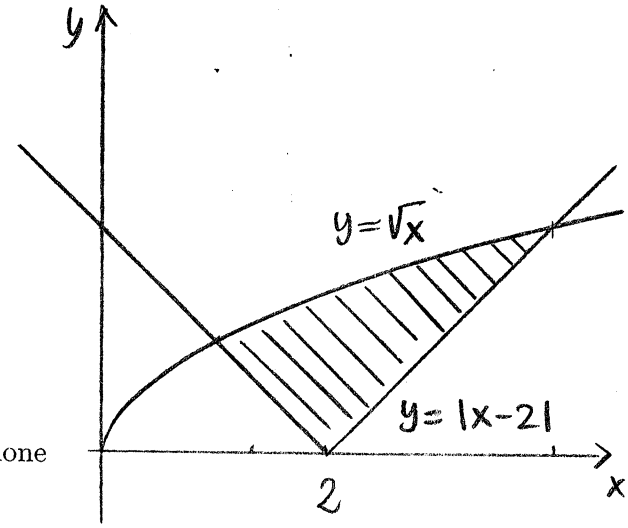
$$\begin{cases} 2x - y + 3w + z = 4 \\ x + y + 3w - z = -1 \\ x + y - 5w - 3z = 3 \\ 4x + y + w - 3z = 6 \end{cases}$$

2) Determinare l'equazione della perpendicolare comune alle rette

$$r_1 \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = s \\ y = 5 + s \\ z = 3 - s \end{cases}$$

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x) = \tan x - \tan^3 x$ nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

4) Determinare l'area della parte di piano evidenziata in figura.



1) SCAMBIAMO 1ª E 2ª RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 4A_1}]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -11 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4 - A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{A_3}{-3}]{A_4 - A_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^1 \text{ SOLUZIONI}$$

$$\begin{cases} x + y + 3w - z = -1 \\ y + w - z = -2 \\ -8w - 2z = 4 \end{cases}$$

POSTO $w = h$, $h \in \mathbb{R}$

RICAVIAMO: $z = -4h - 2$

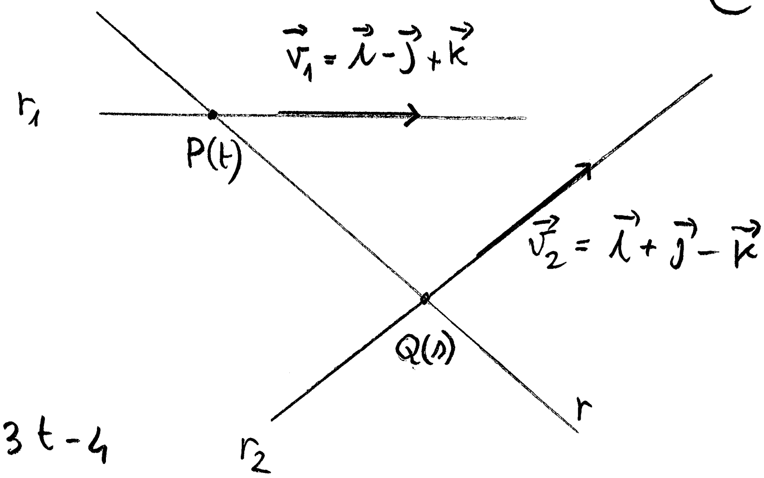
$$y = z - w - 2 = -4h - 2 - h - 2 = -5h - 4$$

$$x = z - y - 3w - 1 = -4h - 2 + 5h + 4 - 3h - 1 = -2h + 1$$

SOLUZIONE: $(1-2h, -5h-4, h, -4h-2)$, $h \in \mathbb{R}$.

2)

$$\vec{PQ} = (s-t)\vec{i} + (4+s+t)\vec{j} - (s+t)\vec{k}$$



$$r \perp r_1, r_2 \iff \begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = s - t - 4 - s - t - s - t = -s - 3t - 4$$
$$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_2 = s - t + 4 + s + t + s + t = 3s + t + 4$$

DETERMINIAMO s, t RISOLVENDO IL SISTEMA :

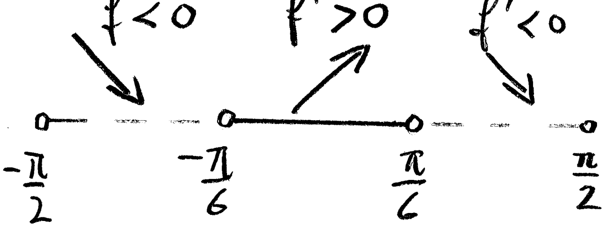
$$\begin{cases} s + 3t = -4 \\ 3s + t = -4 \end{cases} \Rightarrow s = -1, \; t = -1$$

LA PERPENDICOLARE COMUNE PASSA QUINDI PER $P(-1) = (-1, 2, 2)$, $Q(-1) = (-1, 4, 4)$ E HA EQUAZIONE

$$r: \; x = -1, \; y = z.$$

3) $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 x\right)$$

QUINDI $f'(x) > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ MIN. RELATIVO, $x = \frac{\pi}{6}$ MAX. RELATIVO

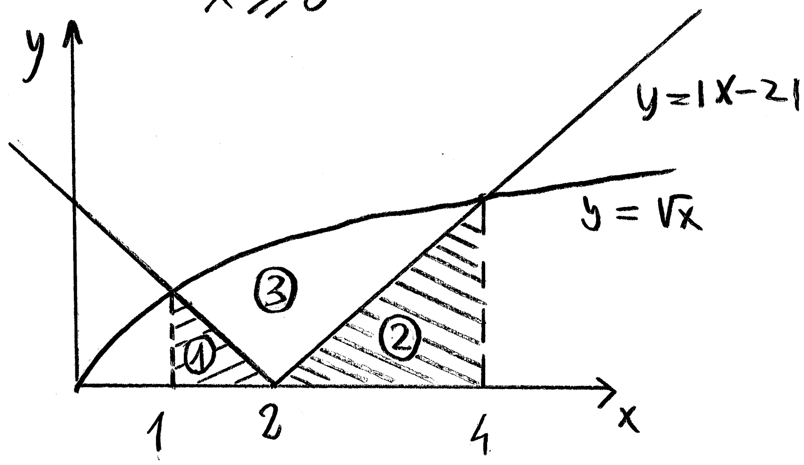
POICHE' $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$

LA FUNZIONE NON HA MAX, MIN. ASSOLUTI.

4) DETERMINIAMO LE INTERSEZIONI RISOLVENDO 9/2/15 C

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = |x-2| \end{cases} \iff \sqrt{x} = |x-2| \iff \begin{cases} x = (x-2)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \implies x = 1,\ x = 4.$$



$$\underset{③}{\mathrm{AREA}} = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx - \underset{①}{\frac{1}{2}} - \underset{②}{2} = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) - \frac{5}{2} = \frac{14}{3} - \frac{5}{2} = \frac{13}{6}$$