Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 8/6/15 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x-2y+w+z=0 \\ -x-y+5w+2z=3 \\ -x-2y-4w+3z=-1 \\ x+5y-2w-6z=-2 \end{cases}$$

2) Calcolare l'area del parallelogramma $ABCD$ sapendo che le diagonali $AC$ e $BD$ sono date, rispettivamente, dai vettori $\mathbf{u}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x)=4\sin^2 x+\dfrac{\cot 2x}{4}$ nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{4}]$.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{2}\Big(x\sqrt{x^2+3}+\frac{x}{5-x^2}\Big)dx\,.$$

1) RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & -6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_1]{\substack{A_2+A_1\\A_3+A_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4+2A_2]{A_3-A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_2+3A_4]{A_3+A_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[A_2,A_3,A_4]{\text{SCAMBIO}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

car$(A)$ = car$(A|B) = 3$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^1$ SOL.

RISOLVIAMO IL SIST. EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x-2y+w+z=0 \\ y+9w-z=4 \\ 33w=15 \end{cases}$$

$w=\frac{5}{11}$, posto $z=h$, $h\in\mathbb{R}$,

$y=4+z-9w=4+h-\frac{45}{11}=h-\frac{1}{11}$

$x=2y-w-z=2h-\frac{2}{11}-\frac{5}{11}-h=h-\frac{7}{11}$

SOLUZIONE: A

$x = h - \frac{7}{11}, \quad y = h - \frac{1}{11}, \quad w = \frac{5}{11}, \quad z = h \quad ; \quad h \in \mathbb{R}.$

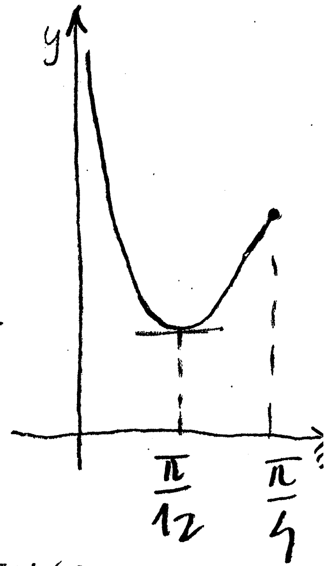
2) $AREA = \frac{1}{2} \| \vec{AC} \wedge \vec{BD} \|$

$$\vec{AC} \wedge \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$AREA = \frac{1}{2}\sqrt{14^2+6^2+4^2} = \sqrt{62}.$$

3) $f'(x) = 8 \operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x} = 4 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 2x}$

$= \frac{8 \operatorname{sen}^3 2x - 1}{2 \operatorname{sen}^2 2x}$. ABBIAMO QUINDI




$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in (0, \frac{\pi}{4}] \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sen} 2x > \frac{1}{2} \\ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x > \frac{\pi}{6} \\ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\iff \frac{\pi}{12} < x \le \frac{\pi}{4}$. POICHE' $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$,

$x = \frac{\pi}{12}$ MIN, ASSOLUTO ; $x = \frac{\pi}{4}$ MAX. RELATIVO.

4) $$\int_{-1}^{2} \left( x\sqrt{x^2+3} + \frac{x}{5-x^2} \right) dx = \left[ \frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2} - \frac{1}{2}\ln(5-x^2) \right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{7^{3/2} - 4^{3/2}}{3} - \frac{\ln 1 - \ln 4}{2} = \frac{7^{3/2} - 8}{3} + \ln 2.$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 8/6/15 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Ridurre a scala le matrici completa/incompleta e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 5y + w + z = -3 \\ -x + 3y + w - 2z = 1 \\ x - 4y - 4w + 5z = 0 \\ y + 3w - 3z = -1 \end{cases}$$

2) Calcolare l'area del parallelogramma $ABCD$ sapendo che le diagonali $AC$ e $BD$ sono date, rispettivamente, dai vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3) Determinare massimi e minimi, relativi e/o assoluti, della funzione $f(x) = 2\tan x + \cot 2x$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{3}, 0)$.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-2}^{3} \Big( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{x}{1+x^2} \Big) dx .$$

1) SCAMBIAMO 1ª e 2ª RIGA E RIDUCIAMO A SCALA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3+A_1]{A_2+2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3+A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

car(A) = car(A|B) = 2

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^2$ SOLUZIONI. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} -x + 3y + w - 2z = 1 \\ y + 3w - 3z = -1 \end{cases}$$

Posto $w = h$, $z = k$, abbiamo:

$$y = -1 - 3w + 3z = -1 - 3h + 3k$$

$$x = 3y + w - 2z - 1 = -3 - 9h + 9k + h - 2k - 1 = -4 - 8h + 7k$$

SOLUZIONE:

$x = -4 - 8h + 7k$, $y = -1 - 3h + 3k$, $w = h$, $z = k$; $h, k \in \mathbb{R}$.

B

2) $AREA = \frac{1}{2} \| \vec{AC} \wedge \vec{BD} \|$

$$\vec{AC} \wedge \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$AREA = \frac{3}{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

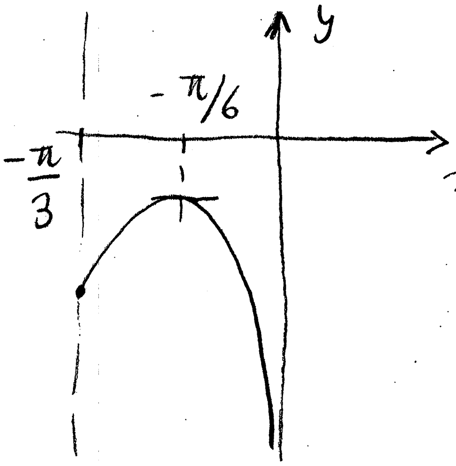
3) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 x} \; \frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4\operatorname{sen}^2 x}$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x > \frac{1}{4} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right) \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{6}$ MAX ASSOLUTO,

$x = -\frac{\pi}{3}$ MIN. RELATIVO,

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$




4) $$\int_{-2}^{3} \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \left[ 2\sqrt{x+3} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_{-2}^{3} = 2\left(\sqrt{6} - 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\ln 10 - \ln 5\right) = 2\left(\sqrt{6} - 1\right) + \frac{\ln 2}{2}.$$