Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/9/13 (I)

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ -x + y + 3z = -2 \\ -x - 5y - z = 0 \end{cases}$$

2) Determinare per quali λ i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = (\lambda + 1)\mathbf{j} + (3\lambda - 1)\mathbf{k}$ formano un angolo di 60^o.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = 4\cos^3 x - 3\sin^2 x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di piano del secondo quadrante limitata dagli assi coordinati e dal grafico dalla parabola $y = -x^2 + x + 6$.

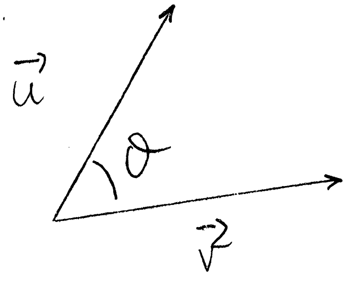
1) SCAMBIAMO SUBITO 1^e E 2^e RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 + A_1 \\ A_4 + A_1}]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 + 2A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_4 \updownarrow A_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CAR $= 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ SOLUZIONE. RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = -1 \\ -z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1 \\ y = -1 \\ x = 4 \end{array}$$



2) APPLICHIAMO LA RELAZIONE

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\vartheta$ IMPONENDO $\vartheta = 60°$.

$$\lambda + 1 + 1 - 3\lambda = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\lambda+1)^2 + (3\lambda-1)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$2 - 2\lambda = \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 1}$. RISOLVIAMO ELEVANDO AL QUADRATO E IMPONENDO CHE SIA $2 - 2\lambda \geq 0$, CIOE' $\lambda \leq 1$: $(2 - 2\lambda)^2 = 5\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -3 \pm 2\sqrt{3}$

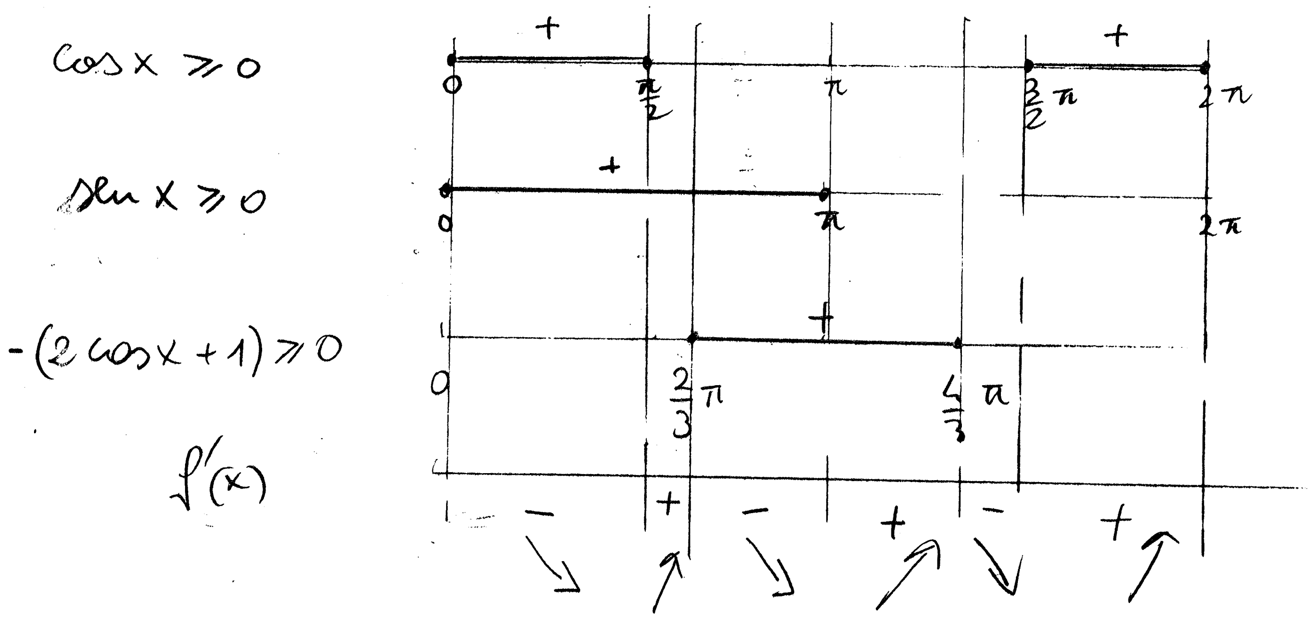
$\Rightarrow \lambda = -3 - 2\sqrt{3}$ OPPURE $\lambda = -3 + 2\sqrt{3}$

ENTRAMBE LE SOL. SONO ACCETTABILI PERCHE' ≤ 1.

3) $f'(x) = -12\cos^2 x \operatorname{sen} x - 6 \cos x \operatorname{sen} x$

$= -6 \cos x \operatorname{sen} x \, (2\cos x + 1)$

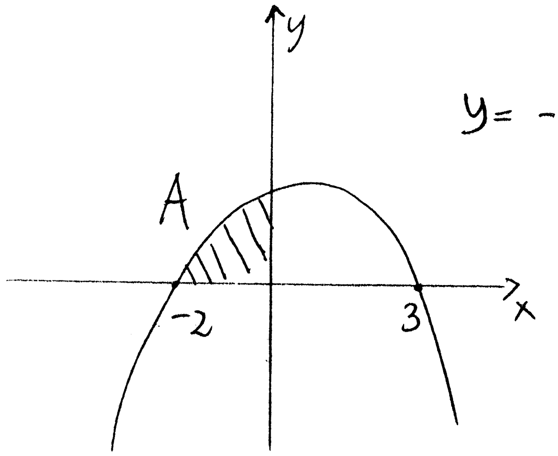
STUDIAMO ORA IL SEGNO DI $f'(x)$ IN $[0, 2\pi]$:



$\Rightarrow$ MASSIMI PER $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$

MINIMI PER $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{2}{3}\pi$

4)



$y = -x^2 + x + 6$

$A = \int_{-2}^{0} (-x^2 + x + 6)\, dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{0} = -\left[-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right]$

$= \frac{22}{3}$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 5/9/13 (II)

nome ____ cognome ____ matr. ____

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + w + 3z = 0 \\ 2x - y - w + 4z = 1 \\ x + 7y + 4w + 5z = -1 \end{cases}$$

2) Determinare per quali λ i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = (1+\lambda)\mathbf{i} + (1-2\lambda)\mathbf{j}$ formano un angolo di 45^o.

3) Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

4) Calcolare l'area della parte di pano limitata dalla retta $y = -4$ e dal grafico dalla parabola $y = x^2 - 5x$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 - A_1]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 + A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CAR $= 2$ $\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE :

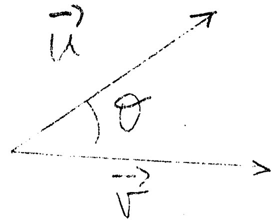
$$\begin{cases} x + 2y + w + 3z = 0 \\ 5y + 3w + 2z = -1 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$

$$\begin{cases} x + 2y = -s - 3t \\ 5y = -1 - 3s - 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1 + 3s + 2t}{5}, \quad x = \frac{2 + s - 11t}{5}, \quad w = s, \quad z = t.$$

2) APPLICHIAMO LA RELAZIONE



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

IMPONENDO $\theta = 45°$:

$$1 + \lambda + 1 - 2\lambda = \sqrt{2}\,\sqrt{(1+\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 - \lambda = \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 2}$$

RISOLVIAMO ELEVANDO AL QUADRATO E IMPONENDO LA CONDIZIONE $2 - \lambda \geq 0$, CIOE' $\lambda \leq 2$.

$\therefore\ 4-4\lambda+\lambda^2 = 5\lambda^2-2\lambda+2$

$$2\lambda^2+\lambda-1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{-1\pm 3}{4} \begin{cases} =+\frac{1}{2} \\ =-1 \end{cases}$$

ENTRAMBE LE SOLUZIONI SONO ACCETTABILI.

3) $f'(x) = 12\,\mathrm{sen}^2x\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x = 3\,\mathrm{sen}\,x\,(4\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 1)$

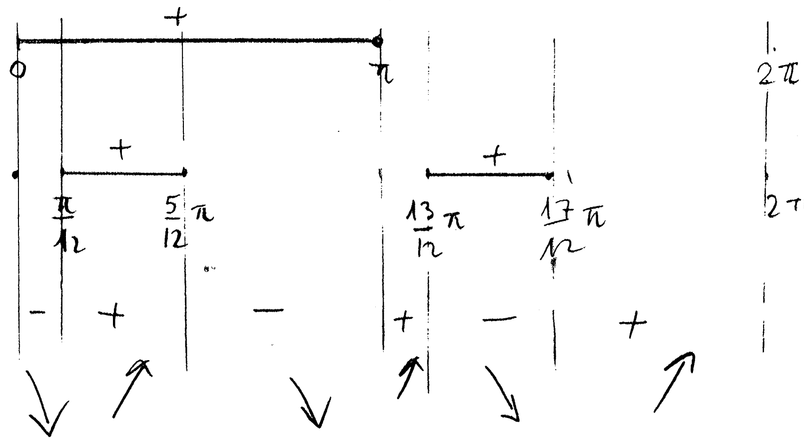
$= 3\,\mathrm{sen}\,x\,(2\,\mathrm{sen}\,2x - 1)$

STUDIAMO ORA IL SEGNO DI $f'(x)$ IN $[0,2\pi]$:

$\mathrm{sen}\,x \geq 0$

$2\,\mathrm{sen}\,2x - 1 \geq 0$

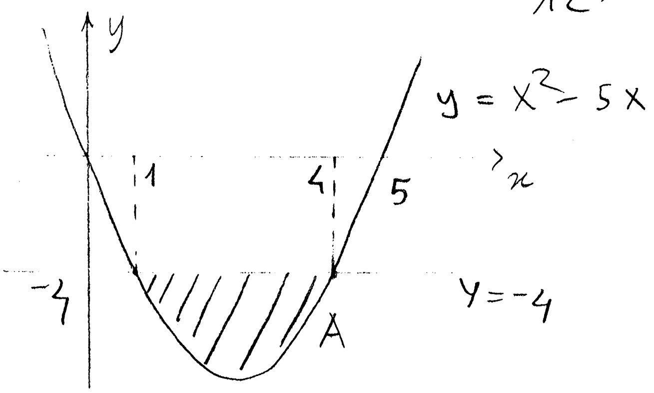
$f(x)$



MASSIMI PER $x = 0,\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ 2\pi.$

MINIMI PER $x = \frac{\pi}{12},\ \pi,\ \frac{17}{12}\pi.$

4)



LA PARABOLA $y = x^2-5x$ E LA RETTA SI INTERSECANO QUANDO $x^2-5x=-4$

$\Rightarrow\ x^2-5x+4=0 \qquad x=1,$

$(x-1)(x-4)=0 \qquad x=4$

$$A=\int_1^4 (-4-x^2+5x)\,dx = \left[-4x-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_1^4$$

$$= \left[-16-\frac{64}{3}+40\right]-\left[-4-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right] = 28-\frac{63}{3}-\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$