Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 4/6/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

A

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + w - z = 1 \\ 2x - y + 3w - 2z = 2 \\ x + 4y + 3w - z = 1 \end{cases}$$

2) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori tali che $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$, $||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Determinare $||\mathbf{v}||$ e l'angolo θ compreso fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

3) Determinare massimi, minimi relativi e assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^4+9}$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 x \sin 2x \, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 - A_1]{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3 - 2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CARATTERISTICA 2

$\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI.

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x - 2y + w - z = 1 \\ 3y + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 - w + z \\ 3y = -w \end{cases}$$

DOVE ASSEGNAMO VALORI ARBITRARI A w, z:

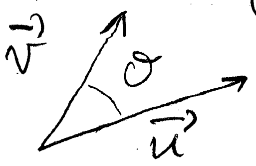
$$\begin{array}{l} w = s \\ z = t \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 - s + t \\ 3y = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \frac{5}{3}s + t \\ y = -\frac{s}{3} \end{array}$$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO DATE DA:

$x = 1 - \frac{5}{3}s + t$, $y = -\frac{s}{3}$, $w = s$, $z = t$ CON $s, t \in \mathbb{R}$.

2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$ (A)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\vartheta = 2$



$(0 \le \vartheta \le \pi)$

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\operatorname{sen}\vartheta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

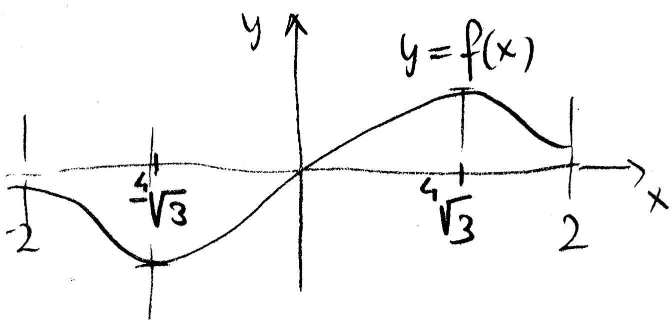
$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{6}$

$\|\vec{v}\| = \frac{2}{\|\vec{u}\|\cos\vartheta} = \frac{2}{5\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{5\sqrt{3}}$

3) $f'(x) = 3\,\frac{3-x^4}{(x^4+9)^2} = 3\,\frac{(\sqrt{3}+x^2)(\sqrt[4]{3}-x)(\sqrt[4]{3}+x)}{(x^4+9)^2}$

QUINDI $f'(x) > 0$ per $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$

$f'(x) < 0$ per $x < -\sqrt[4]{3}$ e $x > \sqrt[4]{3}$



$x = -\sqrt[4]{3}$ MIN ASSOLUTO
$x = \sqrt[4]{3}$ MAX "
$x = -2$ MAX RELATIVO
$x = 2$ MIN "

4) USANDO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$
L'INTEGRALE DIVENTA $2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$.
POICHE' $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$,
L'INTEGRALE INDEFINITO E' DELLA FORMA $\lambda\int f(x)^k f'(x)\,dx$.

$\Rightarrow 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx = 2\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos^4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^4\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{4}$.

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 4/6/13

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

B

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$[redacted] \begin{cases} x - y + w - z = 1 \\ x + y - w - z = 2 \\ x - 5y + 5w - z = -1 \end{cases}$$

2) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori tali che $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2$, $||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| = 2\sqrt{3}$. Determinare $||\mathbf{v}||$ e l'angolo θ compreso fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

3) Determinare massimi, minimi relativi e assoluti della funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 5}$ nell'intervallo $[-5, 3]$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 x \sin 2x \, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 - A_1]{A_2 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 + 2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CAR $= 2$, QUINDI IL SISTEMA HA $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI.

$$\begin{cases} x - y + w - z = 1 \\ 2y - 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - w + z \\ 2y = 1 + 2w \end{cases}$$

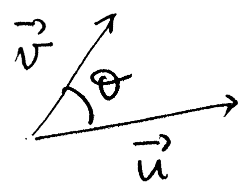
POSTO $w = s$, $z = t$ RICAVIAMO $\begin{cases} y = \frac{1}{2} + s \\ x = 1 + y - w + z = \frac{3}{2} + t \end{cases}$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO QUINDI DELLA FORMA

$x = \frac{3}{2} + t$, $y = \frac{1}{2} + s$, $w = s$, $z = t$ CON $s, t \in \mathbb{R}$.

---

2) $||\vec{u}|| = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$



$(0 \le \theta \le \pi)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \iff ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta = -2$

(B)

$\cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 2\sqrt{3} \iff \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\vartheta = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi$$

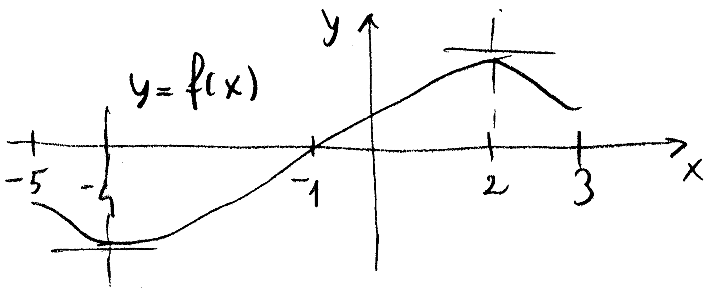
$$\|\vec{v}\| = \frac{-2}{\|\vec{u}\| \cos\vartheta} = \frac{-2}{3\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}.$$

3) $$f'(x) = -\frac{x^2+2x-8}{(x^2-3x+5)^2} = -\frac{(x+4)(x-2)}{(x^2-3x+5)^2}$$

POICHE' IL DENOMINATORE E' SEMPRE POSITIVO ($\Delta<0$), ABBIAMO IMMEDIATAMENTE CHE

$f'(x) > 0$ SE $-4 < x < 2$

$f'(x) < 0$ SE $x < -4$ E SE $x > 2$



$x = -4$ MIN. ASSOLUTO

$x = 2$ MAX "

$x = -5$ MAX. RELATIVO

$x = 3$ MIN "

4) USANDO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$ E IL FATTO CHE $(\operatorname{sen}x)' = \cos x$, L'INTEGRALE E' DELLA FORMA $\lambda\int_\alpha^\beta f(x)^k f'(x)\,dx$:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}2x\,dx = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{2}\,\frac{9-1}{16} = \frac{1}{4}$$

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+y+z=-5 \\ -x-5y+z=-1 \\ -x-2y-z=1 \end{cases}$$

2) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori tali che $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-4$, $||\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||=4$. Determinare $||\mathbf{v}||$ e l'angolo θ compreso fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

3) Determinare massimi, minimi relativi e assoluti della funzione $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ nell'intervallo $[-4,5]$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x\,\sin 4x\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALE LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3+A_1 \\ A_4+A_1}]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-\frac{1}{2}A_2]{A_3-2A_2}$$

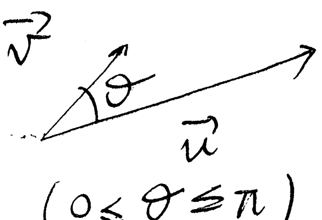
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4-\frac{1}{2}A_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CAR = 3 $\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{3-3}=\infty^0=1$ SOLUZIONE

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2y+4z=-2 \\ -8z=2 \end{cases} \Rightarrow \quad z=-\frac{1}{4}, \quad y=1+2z=\frac{1}{2}, \quad x=-1-y+z=-\frac{7}{4}$$

2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-4 \iff \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta=-4$



$(0\leq\theta\leq\pi)$

(c)

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4 \iff \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\vartheta = 4$$

$$\Rightarrow \tan\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{4}{-4} = -1 \Rightarrow \vartheta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{-4}{\|\vec{u}\| \cos\theta} = \frac{-4}{\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

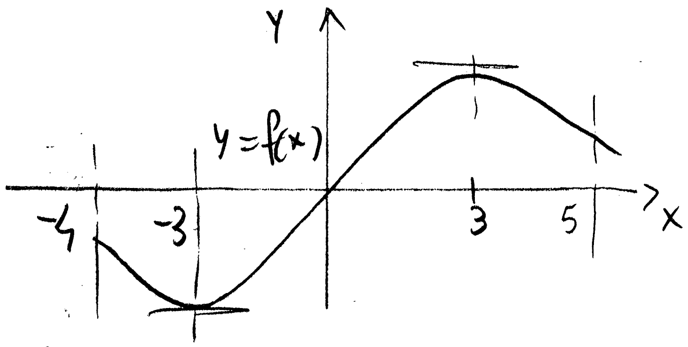
3)

$$f'(x) = -\frac{x^2-9}{(x^2-5x+9)^2} = -\frac{(x-3)(x+3)}{(x^2-5x+9)^2}$$

POICHE' IL DENOMINATORE E' SEMPRE POSITIVO ($\Delta < 0$) ABBIAMO SUBITO CHE

$f'(x) > 0 \iff -3 < x < 3$

$f'(x) < 0 \iff x < -3$ E SE $x > 3$



$x = -3$ MIN. ASSOLUTO

$x = 3$ MAX. "

$x = -4$ MAX RELATIVO

$x = 5$ MIN "

4) USANDO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE

$\operatorname{sen}(4x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$ TROVIAMO

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \operatorname{sen} 4x \, dx = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\cos^3(2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}\left[\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[0 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{24}$$