Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 3/9/14 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+w-2z=1 \\ x+y+4w+2z=2 \\ x+4y-5w-10z=-1 \\ -y+3w+4z=1 \end{cases}$$

2) Determinare l'area del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{u}+3\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ sapendo che $||\vec{u}||=5$, $||\vec{v}||=3$, $||\vec{u}-2\vec{v}||=7$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x)=2^x-3^x$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}\,dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3-A_1]{A_2-A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4-A_2]{A_3+2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE ∞^2 SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x+2y+w-2z=1 \\ -y+3w+4z=1 \end{cases}$$

PONIAMO $w=s$, $z=t$

$y = 3w+4z-1 = 3s+4t-1$

$x = 1-2y-w+2z = 1-6s-8t+2-s+2t = 3-7s-6t$

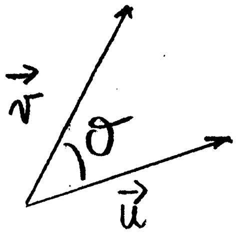
QUINDI LE SOLUZIONI SONO DATE DA

$x=3-7s-6t$, $y=3s+4t-1$, $w=s$, $z=t$ con $s,t\in\mathbb{R}$.

A

2) $A = \|(\vec{u} + 3\vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})\| = \|-(\vec{u} \wedge \vec{v}) + 3(\vec{v} \wedge \vec{u})\|$

$= 4\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$



RICAVIAMO ORA $\sin\theta$:

$\|\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 4\|\vec{v}\|^2 - 4\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$

$49 = 25 + 4 \cdot 9 - 4 \cdot 5 \cdot 3 \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$A = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 24\sqrt{6}$.

3) $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - \ln 3 \cdot 3^x = 3^x \ln 2 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{\ln 3}{\ln 2} \right]$.

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$.

$f(x)$ HA UN MASSIMO ASSOLUTO PER $x = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1 + \cos x}}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x)^{-\frac{1}{3}} \frac{d}{dx}(1 + \cos x)\, dx$

$= -\frac{3}{2} (1 + \cos x)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}\left[2^{2/3} - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3} \right]$.

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 3/9/14 (B)

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + w - 2z = 2 \\ x + y + 4w + 2z = 3 \\ x + 4y - 5w - 10z = 0 \\ -y + 3w + 4z = 1 \end{cases}$$

2) Determinare l'area del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u} - \vec{v}$ sapendo che $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 3$, $||2\vec{v} + \vec{u}|| = 9$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x) = 5^x - 2^x$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sqrt[4]{1 - \sin x}\, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 - A_1]{A_2 - A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 - A_2]{A_3 + 2A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE ∞^2 SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISEMA EQUIVALENTE ;

$$\begin{cases} x + 2y + w - 2z = 2 \\ -y + 3w + 4z = 1 \end{cases}$$

PONIAMO $w = s$, $z = t$

$y = 3w + 4z - 1 = 3s + 4t - 1$

$x = 2 - 2y - w + 2z = 2 - 6s - 8t + 2 - s + 2t = 4 - 7s - 6t$

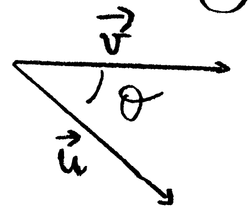
QUINDI LE SOLUZIONI SONO DATE DA :

$x = 4 - 7s - 6t$, $y = 3s + 4t - 1$, $w = s$, $z = t$ con $s, t \in \mathbb{R}$

2) $A = \|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(2\vec{u}-\vec{v})\| = \|-(\vec{u}\wedge\vec{v}) + 2(\vec{v}\wedge\vec{u})\|$

$= 3\,\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = 3\,\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta$ (B)

RICAVIAMO ORA $\sin\theta$:



$\|2\vec{v}+\vec{u}\|^2 = 4\,\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + 4\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

$81 = 4\cdot 9 + 25 + 4\cdot 5\cdot 3\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

QUINDI $A = 3\cdot 5\cdot 3\,\frac{2\sqrt{2}}{3} = 30\sqrt{2}$.

3) $f'(x) = \ln 5\cdot 5^x - \ln 2\cdot 2^x = 2^x\ln 5\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x - \frac{\ln 2}{\ln 5}\right]$

$f'(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}\ln\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}\right)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ HA UN MINIMO ASSOLUTO PER

$x = \frac{1}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}\ln\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}\right)$.

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\sqrt[4]{1-\sin x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)^{\frac{1}{4}}\frac{d}{dx}(1-\sin x)\,dx$

$= -\frac{4}{5}(1-\sin x)^{\frac{5}{4}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{5}\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{4}}\right]$.