Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 13/2/13 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e trovare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

2) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori tali che $||\mathbf{u}|| = 4$, $||\mathbf{v}|| = 3$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Determinare i due possibili valori di $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||$.

3) Un terreno rettangolare deve essere recintato e diviso in due lotti più piccoli da una rete parallela ad uno dei lati. Trovare le dimensioni del più grande terreno di questo tipo che è possibile racchiudere con 240 metri di recinzione.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-2x}\left[\cos x - 2\sin x\right] dx$.

1) SCAMBIAMO 1^a e 2^o RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

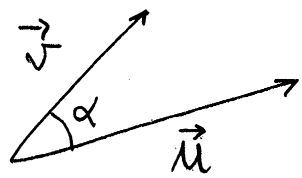
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 3A_1}]{A_2 - 3A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4 - 2A_2]{A_3 - 2A_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{2A_3 - A_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ CAR. MATRICE COMPLETA $= 3$ $\Rightarrow$ IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI

CAR. MATRICE INCOMPLETA $= 2$

2) $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \operatorname{sen} \alpha$



$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}|| = 6$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} = \dfrac{6}{4 \cdot 3} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$

MA $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \pi/6 \\ \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$ $\qquad \cos\alpha = \begin{cases} +\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

A

SEGUE CHE

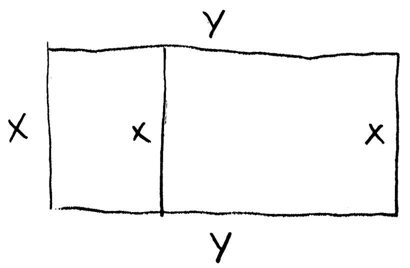
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$= 4^2+3^2+2\cdot 4\cdot 3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 25 \pm 12\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \|u+v\| = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$ o $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$.

3)



$3x+2y=240$

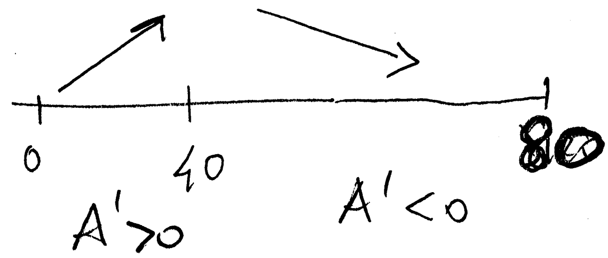
$y = 120-\frac{3}{2}x$

$0 \le x \le 80$

L'AREA $A = A(x)$ VALE

$A(x) = x\cdot y = 120x - \frac{3}{2}x^2$

$A'(x) = 120-3x$



QUINDI L'AREA E MASSIMA QUANDO $x=40$, $y=60$.

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x}(\cos x - 2\operatorname{sen} x)\,dx = \left[e^{-2x}\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/4}$

$$= e^{-\pi/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - e^{0}\operatorname{sen}(0) = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 13/2/13

B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e trovare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x-3y+2z=-2 \\ 2x-4y+z=-5 \\ x-5y+5z=-1 \\ x-3y+3z=0 \end{cases}$$

2) Determinare per quali valori di λ sono complanari i vettori $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{i}-3\mathbf{j}+(\lambda-1)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=4\mathbf{i}-\lambda\mathbf{j}$, $\mathbf{w}=\mathbf{j}+(\lambda-1)\mathbf{k}$.

3) Fra i rettangoli di diagonale $d=4$ determinare quello di massimo perimetro.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA LE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_1]{A_2-2A_1,\ A_3-A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3+A_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{SCAMBIO } A_3 \text{ e } A_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CARATTERISTICA 3 $\rightarrow$ IL SISTEMA HA SOLUZIONE UNICA

RISOLVIAMO IL SISTEMA DERIVATO DALLA MATRICE COMPLETA RIDOTTA A SCALA:

$$\begin{cases} x-3y+2z=-2 \\ 2y-3z=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \quad y=\frac{3z-1}{2}=\frac{3\cdot2-1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$x=3y-2z-2=\frac{15}{2}-2\cdot2-2=\frac{3}{2}$$

2) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ SONO COMPLANARI SE E SOLO SE IL TRIPLO PRODOTTO MISTO $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ E' NULLO, CIOE' SE E SOLO SE

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 & (\lambda-1) \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & (\lambda-1) \end{vmatrix}=0$$

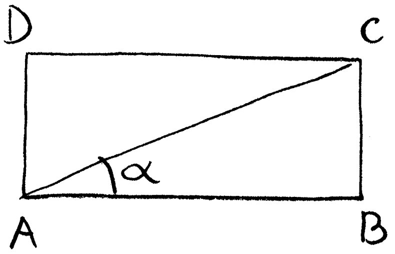
SVILUPPANDO IL DETERMINAMTE LUNGO LA 3ª COLONNA

B

TROVIAMO L'EQUAZIONE $(\lambda - 1)(8 - \lambda^2) = 0$

LE CUI RADICI SONO : $\lambda = 0$, $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$.

3)



$|AC| = d = 4$

$|AB| = |AC| \cos\alpha \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

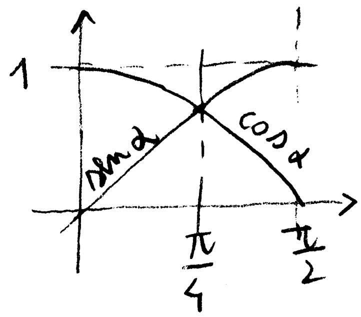
$|BC| = |AC| \operatorname{sen}\alpha$

QUINDI IL PERIMETRO HA LUNGHEZZA

$\ell = 8(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$. CERCHIAMO IL MASSIMO DI

$\ell = \ell(\alpha)$ PER $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$:

$\ell'(\alpha) = 8(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$



$\Rightarrow \ell'(\alpha) > 0$ IN $[0, \frac{\pi}{4})$

$\ell'(\alpha) < 0$ IN $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \ell(\alpha)$ HA MASSIMO ASSOLUTO PER $\alpha = \frac{\pi}{4}$, CIOE' QUANDO ABCD E' UN QUADRATO.

4)

$$\int_1^4 \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{6}{11} x^{11/6} - \ln x\right]_1^4 = \frac{6}{11}\left(4^{11/6} - 1\right) - \ln 4$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 13/2/13

C

nome _______________ cognome _______________ matr. _______________

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e trovare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

2) Dati $A(4,0,1)$, $B = (-1,1,2)$, calcolare la distanza fra i punti A', B' proiezioni ortogonali di A, B sulla retta $r: \dfrac{x-1}{2} = y+1,\ z = 5$.

3) Fra tutti i settori circolari di perimetro $\ell = 8$ determinare quello di area massima.

4) Determinare il baricentro della regione piana limitata dai grafici $y = (x-1)^2$ e $y = -(x-1)^2$, dall'asse y e dalla retta $x = 3$.

1) SCAMBIAMO 1^a e 3^a RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

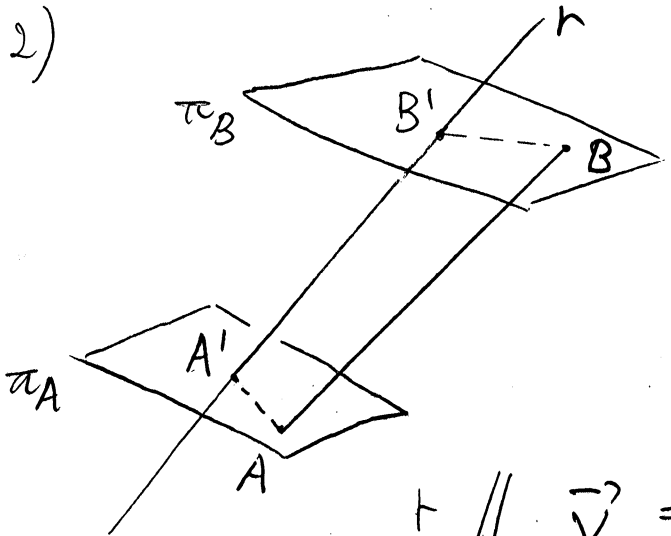
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3-4A_1 \\ A_4+2A_1}]{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 2 \\ 0 & -22 & -7 & 1 \\ 0 & 14 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{A_4+A_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & 2 \\ 0 & -22 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{7A_3-11A_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -104 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

CAR (COMPLETA) = 4 ; CAR (INCOMPLETA) = 3

$\Rightarrow$ IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI

2)

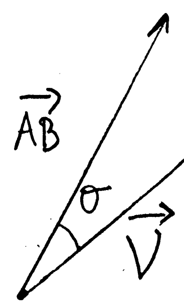


$A \in \pi_A \qquad \pi_A \perp r$

$B \in \pi_B \qquad \pi_B \perp r$

$A' = \pi_A \cap r$

$B' = \pi_B \cap r$



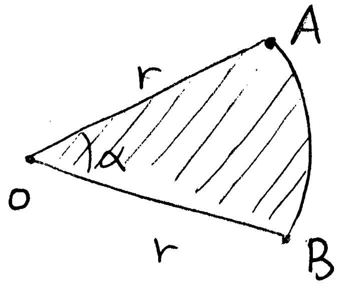
$r \parallel \vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

C

$$|A'B'| = \|\vec{A'B'}\| = \|\vec{AB}\|\,|\cos\theta| = \cancel{\|\vec{AB}\|}\,\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{v}\,|}{\cancel{\|\vec{AB}\|}\,\|\vec{v}\|}$$

$$= \frac{|\vec{AB}\cdot(2\vec{i}+\vec{j})|}{\sqrt{5}} = \frac{|(-5\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot(2\vec{i}+\vec{j})|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

3)



$$\ell = 2r + |\widehat{AB}| = 2r + \alpha r = 8$$

INDICANDO CON $S = S(r)$ L'AREA DEL SETTORE CIRCOLARE, ABBIAMO:

$$S(r) = \alpha r^2 = \left(\frac{8-2r}{r}\right)\cdot r^2 = 8r - 2r^2 \qquad 0 \leq r \leq 4$$

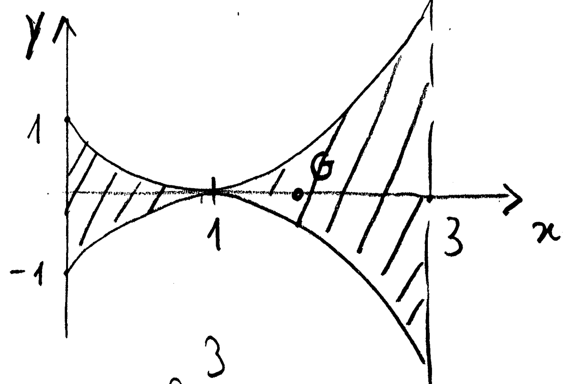
$$S'(r) = 8 - 4r$$

$S'>0$ ↗ ; $S'<0$ ↘

0 — 2 — 4

$S(r)$ E' MASSIMA QUANDO $r = 2$, $\alpha = 2$.

4)



$$\text{Area} = 2\int_0^3 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_0^3 = 6$$

$$M_y = 2\int_0^3 x(x-1)^2\,dx = 2\int_0^3 (x^3-2x^2+x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow \quad X_G = \frac{M_y}{A} = \frac{27/2}{6} = \frac{9}{4}$$

$Y_G = 0$ PER SIMMETRIA

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 13/2/13

nome cognome matr. D

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e trovare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x-2y-7z=5 \\ x+4y-z=5 \\ x-2y-2z=4 \\ x-2y-4z=2 \end{cases}$$

2) Scrivere il vettore $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ come somma di due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ con $\mathbf{v}$ parallelo al piano $\pi: x+y-3z+4=0$, $\mathbf{w}$ parallelo alla retta $r: \dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{z-2}{3}$.

3) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x)=-x^3+x^2+x-1$.

4) Determinare il barientro della regione piana limitata dal grafico della parabola $y=2-x^2$ e dall'asse x.

1) SCAMBIAMO 1^e e 2^e RIGA E RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[A_4-A_1]{\substack{A_2-2A_1 \\ A_3-A_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4+3A_2]{A_3+3A_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ENTRAMBE LE MATRICI HANNO CARATTERISTICA 3
$\Rightarrow$ IL SESTEMA HA SOLUZIONE UNICA

DALL'ULTIMA MATRICE RICAVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x+4y-z=5 \\ 2y+z=1 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & z=1 \\ & y=\frac{1-z}{2}=0 \\ & x=z-4y+5=6 \end{aligned}$$

2) OSSERVIAMO CHE:

$$\vec{v} \parallel \pi \iff \vec{v} \perp (\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}) \iff \vec{v}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})=0.$$

$$\vec{w} \parallel r \iff \vec{w} \parallel (2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}) \iff \vec{w}=\lambda(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})$$

PER QUALCHE $\lambda \in \mathbb{R}$.

. POICHE' DEVE ESSERE **D**

$$\vec{v} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k} - \lambda(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}),$$

RICAVIAMO λ IMPONENDO CHE

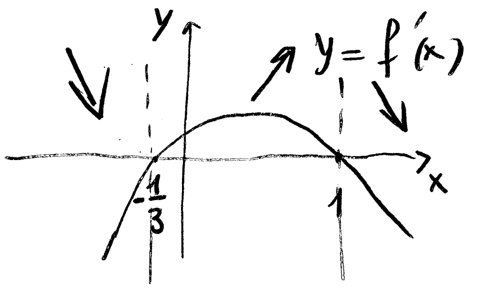
$$\left((3-2\lambda)\vec{\imath} - (1+\lambda)\vec{\jmath} + (2-3\lambda)\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}\right) = 0$$

SVOLGENDO IL PRODOTTO SCALARE SI ARRIVA ALL'EQUAZIONE $-4 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{2}{3}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}),$$

$$\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{\imath} - \frac{5}{3}\vec{\jmath}.$$

3) $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

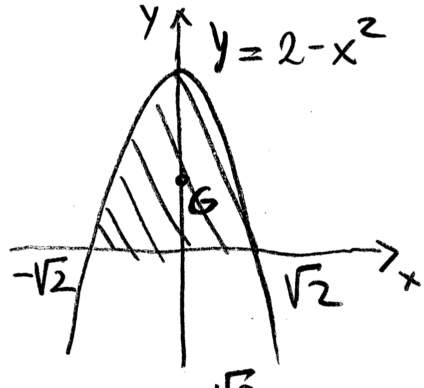


$f'(x) = 0$ PER $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$

$f'(x) > 0$ NELL'INTERVALLO FRA LE DUE RADICI.

$\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}$ E' MIN. REL. ; $x = 1$ E' MAX. REL.

4)



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$M_x = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}(2 - x^2)^2 dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - 2x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{10}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{32}{15}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow y_G = \dfrac{M_x}{A} = \frac{32}{15}\sqrt{2} \Big/ \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{5}$; $x_G = 0$ PER SIMMETRIA