Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 11/6/14 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + w - z = -2 \\ -x + 3y - 5w + 2z = 3 \\ x + 7y - 3w = -1 \\ 4x + 3y + 8w - 5z = -9 \end{cases}$$

2) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ sul piano $\pi$ passante per l'origine degli assi e parallelo ai vettori $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x) = -2x + \arctan(1 + 3x)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^2(2x) \cos x \, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -5 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 4A_1}]{A_2 + A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 + A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$car(A) = car(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\begin{cases} x + 2y + w - z = -2 \\ 5y - 4w + z = 1 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$, $\Rightarrow$ $y = (1 + 4s - t)/5$

$$x = z - 2y - w - 2 = t - \frac{2 + 8s - 2t}{5} - s - 2 = \frac{7t - 13s - 12}{5}$$

LA SOLUZIONE E' DATA DA :

$$\left( \frac{7t - 13s - 12}{5}, \frac{1 + 4s - t}{5}, s, t \right) \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}.$$

2) $$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -7(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})$$ A

E' ORTOGONALE AL PIANO $\pi$. SI TRATTA ORA DI SCOMPORRE $\vec{u}$ IN $\vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$, DOVE $\vec{u}_{\perp}$ E' ORTOGONALE AL PIANO E $\vec{u}_{\parallel}$ E' LA PROIEZIONE CERCATA.

$$\vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \left[ \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2} \right] (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$= 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 5\vec{k} - \frac{6}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}.$$

3) $$f'(x) = -2 + \frac{3}{1 + (1+3x)^2} = \frac{1 - 2(1+3x)^2}{1 + (1+3x)^2}$$

QUINDI

$$f'(x) > 0 \iff (1+3x)^2 < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < 1+3x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < x < -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ MIN. REL.

$x = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ MAX. REL.

POICHE' $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $f(x)$ NON HA MASSIMI / MINIMI ASSOLUTI.

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 11/6/14 A

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+w-z=-2 \\ -x+3y-5w+2z=3 \\ x+7y-3w=-1 \\ 4x+3y+8w-5z=-9 \end{cases}$$

2) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ sul piano $\pi$ passante per l'origine degli assi e parallelo ai vettori $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x)=-2x+\arctan(1+3x)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos^2(2x)\cos x\,dx$.

4) $$\int_{-\pi/3}^{\pi}\cos^2(2x)\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)^2\cos x\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-2\operatorname{sen}^2x)^2\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-4\operatorname{sen}^2x+4\operatorname{sen}^4x)\cos x\,dx$$

$$=\left[\operatorname{sen}x-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3x+\frac{4}{5}\operatorname{sen}^5x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=0-\left(-\frac{\sqrt3}{2}+\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt3}{2}-\frac{4}{5}\frac{9}{16}\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{9}{40}\sqrt3.$$

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 11/6/14 **B**

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + w - z = 1 \\ -x + 3y - 5w + 2z = -4 \\ x + 7y - 3w = -2 \\ 4x + 3y + 8w - 5z = 7 \end{cases}$$

2) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sul piano $\pi$ passante per $P(0, -1, 1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) \cos x \, dx$.

1) RIDUCIAMO A SCALA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 2 & -4 \\ 1 & 7 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 8 & -5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_3 - A_1 \\ A_4 - 4A_1}]{A_2 + A_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_4 + A_2]{A_3 - A_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{car}(A) = \text{car}(A|B) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

RISOLVIAMO IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x + 2y + w - z = 1 \\ 5y - 4w + z = -3 \end{cases}$$

POSTO $w = s$, $z = t$

$\Rightarrow y = (4s - t - 3)/5$

$$x = 1 - 2y - w + z = 1 - \frac{8s - 2t - 6}{5} - s + t = \frac{11 - 13s + 7t}{5}$$

LA SOLUZIONE E' DATA DA

$$\left( \frac{11 - 13s + 7t}{5}, \frac{4s - t - 3}{5}, s, t \right) \text{ con } t, s \in \mathbb{R}.$$

B

2) $v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{k}$

E' ORTOGONALE A PIANO $\pi$. SI TRATTA ORA DI SCOMPORRE $\vec{u}$ IN $\vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ DOVE $\vec{u}_{\perp}$ E' ORTOGONALE AL PIANO $\pi$ E $\vec{u}_{\parallel}$ E' LA PROIEZIONE CERCATA:

$$\vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \left[ \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{\| v_1 \wedge v_2 \|^2} \right] (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$$

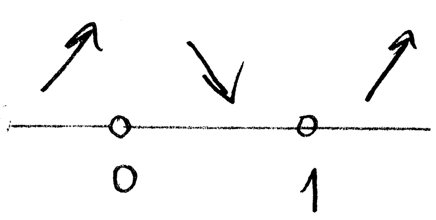
$$= 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} - \frac{27}{110} (-2\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{k})$$

$$= \frac{274\vec{i} - 197\vec{j} - 245\vec{k}}{110}.$$

3) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+(1-2x)^2} = \dfrac{4(x^2-x)}{1+(1-2x)^2}$

QUINDI

$f'(x) > 0 \iff x^2 - x > 0 \iff x < 0$ OPPURE $x > 1$




$x = 0$ MAX. REL.

$x = 1$ MIN. REL.

POICHE' $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f(x)$ NON HA MASSIMI / MINIMI ASSOLUTI.

Università IUAV - Compito di Analisi Mat. & Geometria 11/6/14 B

nome cognome matr.

Avvertenze: dati personali in STAMPATELLO. Riportate **tutti i risultati** su questo foglio.

1) Determinare le caratteristiche delle matrici completa, incompleta e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + w - z = 1 \\ -x + 3y - 5w + 2z = -4 \\ x + 7y - 3w = -2 \\ 4x + 3y + 8w - 5z = 7 \end{cases}$$

2) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sul piano $\pi$ passante per $P(0, -1, 1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

3) Derminare i punti di massimo e minimo, relativi e/o assoluti, della funzione: $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$.

4) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) \cos x \, dx$.

4) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2} \sin^2(2x) \cos x \, dx = 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x \, dx$$

$$= 4 \left[ \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left( \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5} \frac{9}{16} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$= 4 \left[ \frac{2}{15} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{160} \right] = \frac{8}{15} - \frac{11}{40} \sqrt{3}.$$