

# *Elementi di matematica finanziaria*

---

09.XI.2009

# La matematica finanziaria e l'estimo

- Nell'ambito di numerosi procedimenti di stima si rende necessario operare con valori che presentano scadenze temporali differenziate
- Ciò rende impossibile una loro trattazione con le tradizionali regole algebriche e impone l'impiego di strumenti che consentano di operare con valori diversamente posizionati temporalmente
- La ricchezza degli strumenti della matematica finanziaria non può certamente essere riassunta in una lezione: in questa sede l'obiettivo è di concentrare l'attenzione su alcuni strumenti che consentono alcune importanti operazioni di stima

# Interesse, montante, montante unitario

- **L'interesse** è il prezzo d'uso del capitale
  - il tasso può essere espresso in termini unitari (ad es. 0,01) oppure in termini percentuali (1%)
- La somma del capitale e dei relativi interessi è definita **montante**
- Il **montante unitario** ( $q$ ) è la somma del capitale unitario (riferito ad una euro) e degli interessi maturati in un anno
  - se il tasso di interesse è 0,01,  $q$  è 1,01

# Interesse semplice, interesse composto

- L'interesse può essere
  - **semplice**, quando gli interessi maturati **non maturano** a loro volta altri interessi
  - **composto**, nel caso contrario
- L'interesse semplice è impiegato per periodi inferiori o uguali all'anno

# Interesse semplice

- In regime di interesse semplice, **l'interesse** e il **montante** sono rispettivamente dati da:

$$I = C r n$$

$$M = C + C r n = C (1 + r n)$$

- dove  $n$  è la frazione dell'anno considerata
- E quindi la stima di  $C$ , noto  $M$ , sarà eguale a:

$$C = \frac{M}{(1 + r n)}$$

# Interesse composto

- Dopo un anno, una somma investita genera

$$M = C (1 + r)$$

Formula eguale al caso dell'interesse semplice!

- Dopo due anni:

$$M = [C (1 + r)](1 + r) = C (1 + r)^2$$

- Dopo  $n$  anni

$$M = C (1 + r)^n$$

- Il valore anticipato di  $C$  è uguale a

$$C = \frac{M}{(1 + r)^n}$$

# Capitali nel tempo

- Se le prestazioni finanziarie hanno, a parità di ammontare, un valore diverso in funzione della loro scadenza, **non potrà sommare valori differiti nel tempo**
- Per effettuare delle operazioni algebriche dovrà quindi riportare **tutti i valori allo stesso momento**
- Gli strumenti sono rappresentati dai **coefficienti di anticipazione e posticipazione**, che variano in funzione della durata del periodo considerato

# I coefficienti di anticipazione e di posticipazione

- **Periodi inferiori all'anno**
- Coefficiente di posticipazione

$$1 + r n$$

- Coefficiente di anticipazione

$$\frac{1}{1 + r n}$$

- **Periodi superiori all'anno**
- Coefficiente di posticipazione

$$q^n$$

- Coefficiente di anticipazione

$$\frac{1}{q^n}$$



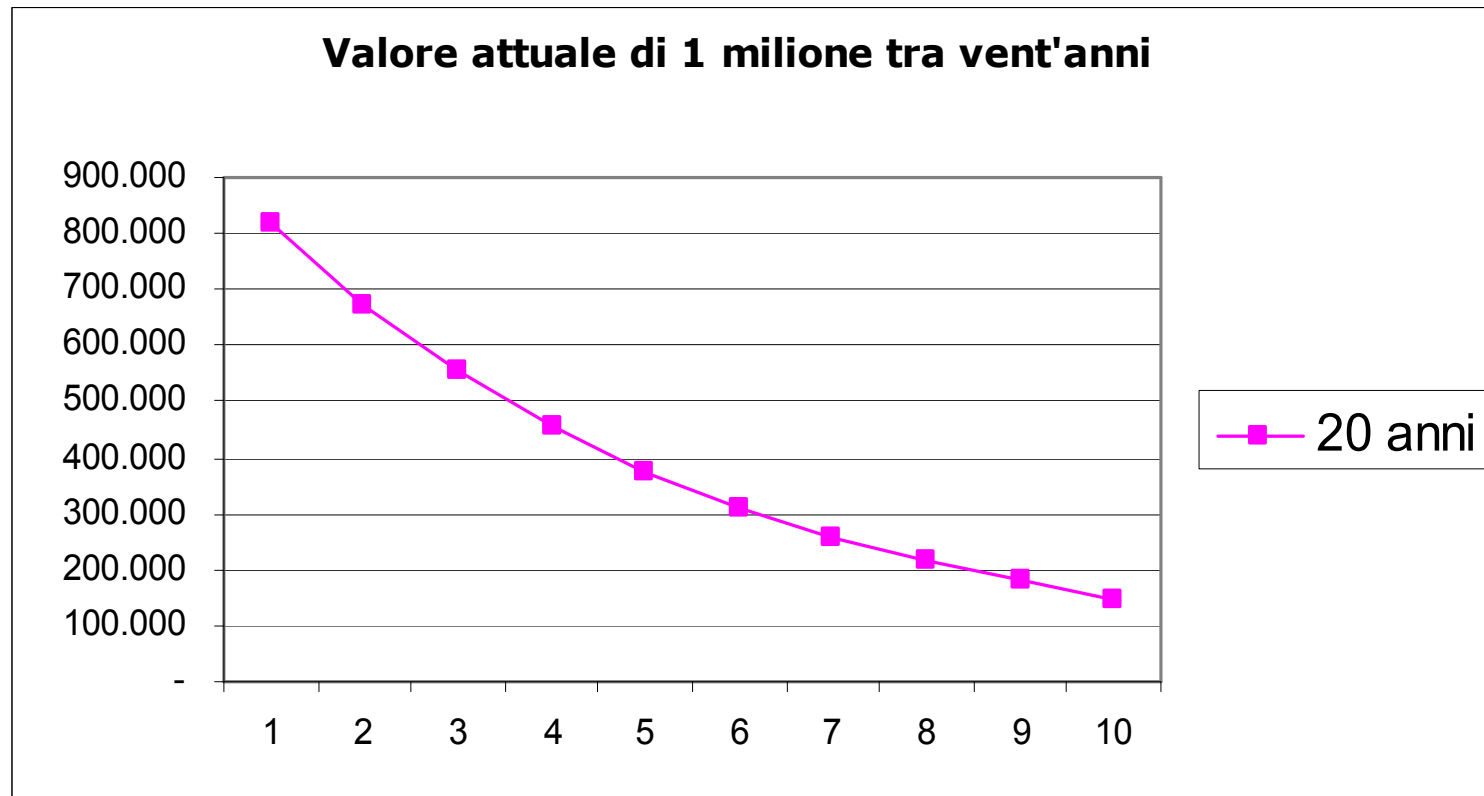
# Un milione al variare del tempo e del tasso di interesse

All'aumentare del **tempo, diminuisce** il valore

Tasso di interesse	1 anno	2 anni	3 anni	10 anni	20 anni
1%	990.099	980.296	970.590	905.287	819.544
2%	980.392	961.169	942.322	820.348	672.971
3%	970.874	942.596	915.142	744.094	553.676
4%	961.538	924.556	888.996	675.564	456.387
5%	952.381	907.029	863.838	613.913	376.889
6%	943.396	889.996	839.619	558.395	311.805
7%	934.579	873.439	816.298	508.349	258.419
8%	925.926	857.339	793.832	463.193	214.548
9%	917.431	841.680	772.183	422.411	178.431
10%	909.091	826.446	751.315	385.543	148.644

Al crescere del **saggio**, il valore **diminuisce**

# Valore e tasso di interesse



**Saggio di attualizzazione**

# Annualità

- Con il simbolo  $a$  vengono indicate le annualità, ovvero quelle prestazioni finanziarie che si verifica ad intervalli annuali
- Nel caso delle annualità, oltre all'ammontare e alla scadenza, bisogna conoscere anche il dato relativo alla loro durata
- Esse possono essere:
  - posticipate o anticipate, in base alla scadenza rispettivamente all'inizio o alla fine dell'anno
  - costanti o variabili, in funzione del loro ammontare
  - limitate o illimitate, in base alla durata delle prestazioni

# Annualità costanti, posticipate, limitate

- Il caso delle annualità posticipate limitate si presenta nel caso in cui, ad esempio, si ponga in locazione un immobile destinato ad un impiego temporalmente definito
- E' possibile procedere al calcolo del valore delle annualità sia considerando il momento della stima, sia considerando il momento in cui si ipotizza la fine dello sfruttamento economico del bene
- Nel primo caso parleremo di **accumulazione iniziale** delle annualità, nel secondo di **accumulazione finale**

# Accumulazione iniziale e finale

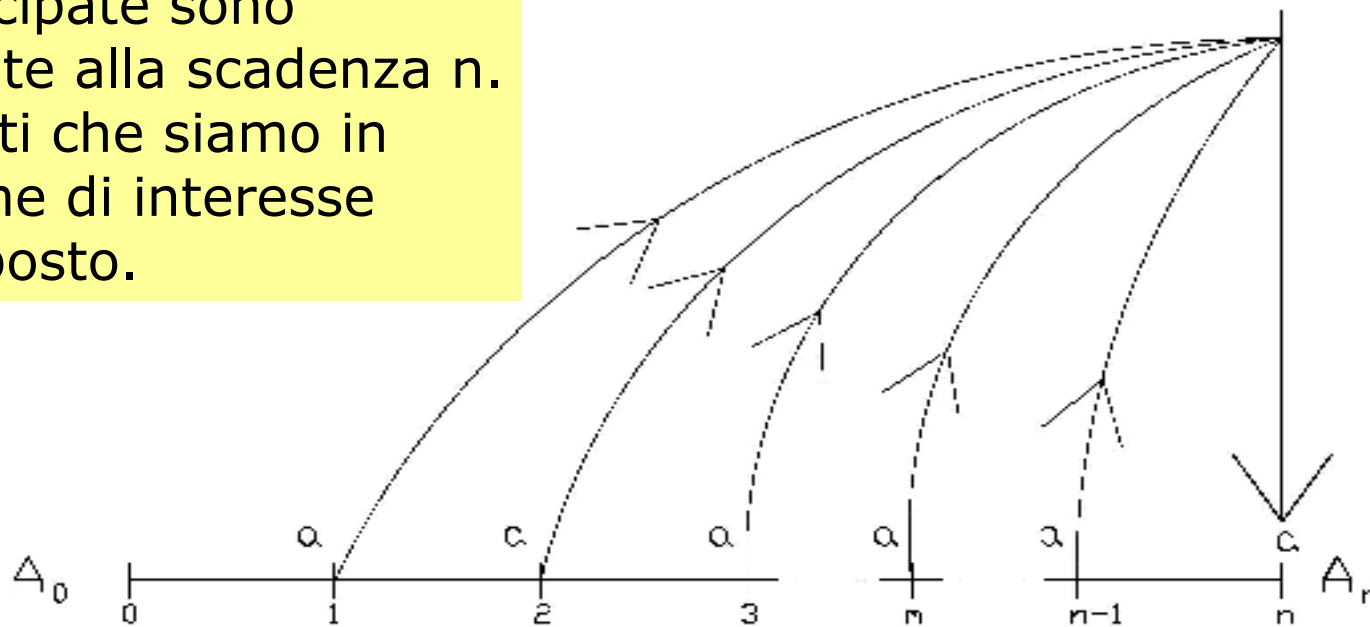
- Le formule per il calcolo dell'accumulazione iniziale  $A_i$  e finale  $A_f$  sono riportate di seguito

$$A_i = \frac{a (q^n - 1)}{r q^n}$$

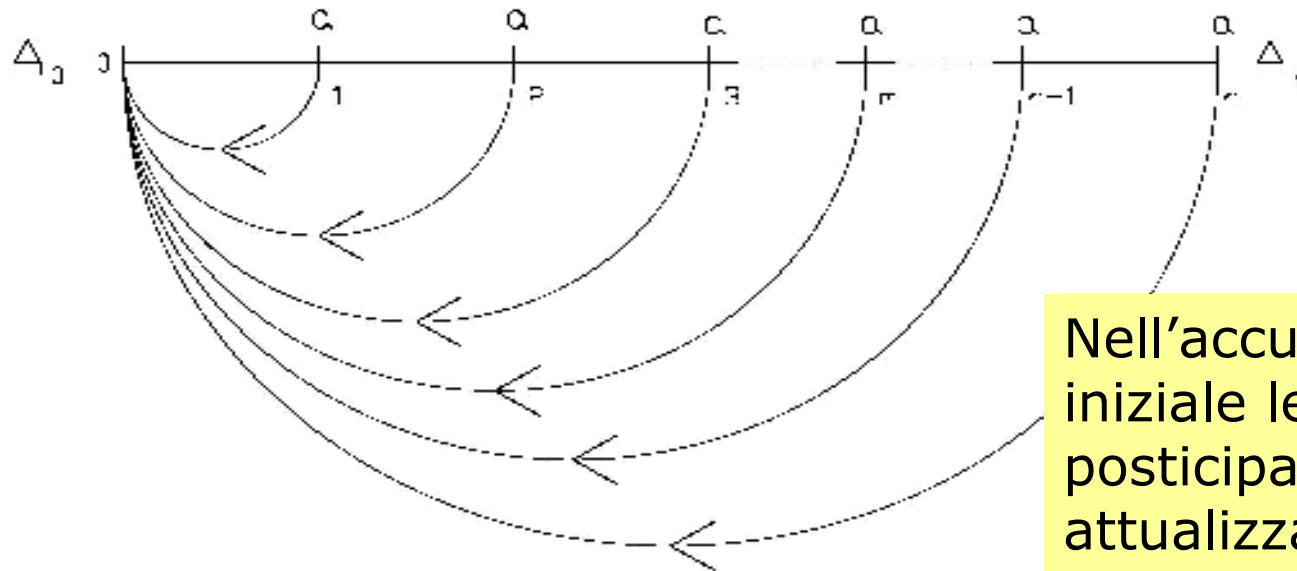
$$A_f = \frac{a (q^n - 1)}{r}$$

# La rappresentazione grafica dell'accumulazione finale

Nell'accumulazione finale le annualità posticipate sono portate alla scadenza  $n$ . Si noti che siamo in regime di interesse composto.



# La rappresentazione grafica dell'accumulazione iniziale



Nell'accumulazione iniziale le annualità posticipate sono attualizzate al momento della stima

# Annualità costanti, posticipate, illimitate

- Il caso delle **annualità posticipate illimitate** si presenta nel caso in cui si consideri un immobile di durata illimitata: è l'ipotesi della **stima per capitalizzazione**
- L'accumulazione **iniziale** è calcolata come segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ai = \frac{a (q^n - 1)}{r q^n}$$

$$Ai = \frac{a}{r}$$



# La quota di reintegrazione

- La quota di reintegrazione è quell'**annualità costante e posticipata** che viene accumulata per un certo numero di anni allo scopo di costituire un capitale di entità predeterminata

$$Q = \frac{C r}{q^n - 1}$$

- Il calcolo della quota deriva dal calcolo di  $Af$ :
  - $C$  è l'accumulazione finale  $Af$
  - $Q$  è l'annualità  $a$

# Interesse e valore di C

- Si noti che il **valore della quota** di reintegrazione  $Q$  è **funzione**
  - della durata delle annualità
  - del valore di C
  - e del saggio di interesse
- In particolare, mantenendo costanti le altre variabili, la **quota aumenta all'aumentare del valore dell'accumulazione finale, diminuisce all'aumentare della durata e del saggio di interesse**

# Un esempio

- Dobbiamo stimare la quota da accantonare annualmente per disporre tra 5 anni di 100.000 euro al saggio del 3%
- Il calcolo è il seguente:
$$Q = \frac{100.000 * 0,03}{1,03^5 - 1} \approx 18.835$$
- Se elevo l'**accumulazione finale** a 200.000, la quota aumenta a 37.670 euro circa
- Se **aumento la durata delle annualità** a 10 anni, mantenendo l'obiettivo di una accumulazione finale a 100.000, la quota scende a 8.723 euro
- Se **aumenta il tasso di interesse**, sempre nell'ipotesi di raggiungere 100.000 euro in 5 anni, la quota scende a 18.097 euro