Esame di MQAT / Statistica del 19-01-2011

Nome / Mail : ....

1) Si consideri la colonna 1 della Tabella di dati dell'Esercizio 6.3 del libro. Dividere in 5 classi, calcolare le frequenze e definire la Classe Mediana.

2) Una classe di 14 studenti, di cui 2 stranieri, deve partecipare ad un laboratorio. Quale e' la probabilita' che dividendoli casualmente in 2 gruppi, si abbia uno straniero in ogni gruppo ?

3) Dato un campione di 2 osservazioni da una popolazione con μ=1 e σ^2=2, calcolare l'errore quadratico medio (MSE) della statistica $\tilde{X} = 0.33\, X_1 + 0.66\, X_2 - 1/2$, come stimatore della media μ.

4) In un campione di 30 persone (intervistato su una opera pubblica), 17 unita' si sono dichiarate favorevoli. Utilizzando questo RISULTATO, calcolare la probabilita' che ripetendo l'indagine i favorevoli siano in minoranza.

5) Si riprenda il punto precedente: una indagine alternativa condotta su 35 persone ha fornito 18 favorevoli. Calcolare un intervallo di confidenza al 90% per la differenza delle medie, e verificare l'ipotesi nulla.

6) Si consideri il modello $Y_i = -3 + 0.5\, X_i + e_i$, S_e^2=4 con X_i deterministici. Sulla base dei valori S_X^2=9, $\bar{X}$=-1 e n=15, calcolare l'intervallo di confidenza ESATTO al 95%, per la previsone di Y_0 corrispondente al valore X_0=3.

Soluzioni

1) semplice

2) dal calcolo combinatorio `http://it.wikipedia.org/wiki/Combinazione`, il numero di modi di distribuire 14 persone in 2 gruppi di 7 e' equivalente a quello di formare 1 gruppo di 7 a partire da 14 elementi (il secondo gruppo sara' automaticamente determinato), cioe' dalle combinazioni: $\binom{14}{7} = 14!/(14-7)!7!$=3432 questo e' lo spazio campione, il numero di casi possibili. Analogamente, il numero di casi Sfavorevoli (2 stranieri nello stesso gruppo o un gruppo di soli italiani) e' $\binom{12}{7}$=792. Quindi la probabilita' cercata e' 1-792/3432=77%

3) lo stimatore non e' corretto, infatti E($\tilde{X}$)=.33*E(X_1)+.66*E(X_2)-1/2=0.5$\neq$1, e la sua distorsione e' D($\tilde{X}$)=E($\tilde{X}$)-μ=-0.5. La sua varianza invece V($\tilde{X}$) $= .33^2\sigma^2 + .66^2\sigma^2$=1.09. Per cui MSE($\tilde{X}$)=(D^2+V)=1.34 che e' maggiore di MSE($\bar{X}$)=$\sigma^2/2$=1

4) la proporzione dei favorevoli e' $\hat{\pi}_n$=17/30=0.57, assumendo ora π=0.57 (come se fosse il parametro vero, non una sua stima) si cerca la probabilita' P($\hat{\pi}_n < 0.5$). Poiche' $\hat{\pi}_n$ e' una media, avra' distribuzione approx normale N$[\pi, \pi(1-\pi)/n]$, e quindi standardizzando si ha P$[z \leq (0.5 - .57)/\sqrt{.57 * .43/30}]$=P($z \leq$-.77)=22%

5) la nuova proporzione sara' $\hat{\pi}_2$=18/35=0.51, l'intervallo di confidenza approssimato per la differenza delle proporzioni al 90% di probabilita' sara

$$\hat{\delta}_{1,2} \approx (.57 - .51) \pm 2\sqrt{.57 * .43/30 + .51 * .49/35} = [-.19, +.31]$$

si accetta l'ipotesi di uguaglianza tra le due proporzioni.

6) la previsione e' $\hat{Y}_0 = -3 + .5 * 3$=-1.5, e l'intervallo di confidenza al 95% sotto ipotesi di Y_i nornali e X_i deterministici, utilizza la student $t_{0.025}(n\text{-}2)$=2.16

$$\hat{Y}_{1,2} = -1.5 \pm 2.16 * 2 * \sqrt{1 + 1/15 + (3+1)^2/(15 * 9)} = [-6.2, 3.2]$$

porta ad accettare l'ipotesi di valore $Y_0 = 0$