PRINCIPALI GRANDEZZE FOTOMETRICHE

Fattore di visibilità (o di sensibilità visiva) $K(\lambda)$: funzione che rappresenta la sensibilità media dell'occhio umano a radiazioni di differente lunghezza d'onda ma di eguale energia.
La massima **sensazione visiva** si riscontra in corrispondenza della radiazione con $\lambda = 555nm$ ed è pari a: 683 lumen/watt, pertanto:

$$K(555nm) = K_{\max} = 683\left[\frac{\ln}{W}\right]$$

per comodità si definisce un coefficiente di visibilità ***V***, o **coefficiente spettrale di visibilità**, tramite la relazione:

$$V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}}$$

il **flusso luminoso** in corrispondenza di una data lunghezza d'onda sarà dato da:

$$\Phi = K(\lambda)\cdot W(\lambda) \quad [\ln]$$

dove $W(\lambda)$ è la potenza della radiazione della lunghezza d'onda considerata [W].
Il flusso luminoso si misura in **lumen** (ln).

Se la radiazione non è monocromatica si dovrà calcolare il *K* medio come segue:

$$V_{medio} = \frac{\int_0^\infty K(\lambda)\cdot e(\lambda)\cdot d\lambda}{\int_0^\infty e(\lambda)\cdot d\lambda}$$

dove $e(\lambda)$ à il potere emissivo monocromatico (W/m^3) della sorgente che emette la radiazione.

L'**intensità luminosa** è definita come il rapporto tra il flusso luminoso e l'angolo solido entro cui esso viene emesso:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad [cd]$$

la sua unità di misura è la **candela (cd)** definita nella Conferenza Internazionale di pesi e misure del1979 come "l'intensità luminosa in una determinata direzione di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza pari a $540\cdot 10^{12}\,Hz$, la cui intensità energetica nella stessa direzione è pari ad 1/683 di watt per steradiante". La candela è una delle sette unità di misura fondamentali del S.I.

Da tale definizione consegue che il lumen (ln) è il flusso luminoso emesso da una sorgente puntiforme ed isotropa avente intensità pari ad una candela entro l'angolo solido di uno steradiante quando $\lambda = 0{,}555\mu m$ cioè $f = 540\cdot 10^{12}\,Hz$. In tali condizioni il flusso energetico uscente dalla sorgente, entro l'angolo solido di uno steradiante, è pari ad 1/683 di watt.

L'**illuminamento (*E*)** è dato dal rapporto tra il flusso luminoso e l'area della superficie su cui esso incide:

$$E = \frac{d\Phi}{dA} \text{ [lx]}$$

esso si misura in lux [lx], un lux equivale ad un lumen su un metro quadrato.

La **Radianza (*R*)** è data invece dal rapporto tra il flusso luminoso e l'area della superficie che lo emette. Si misura anch'essa in lux.

$$R = \frac{d\Phi}{dA} \text{ [lx]}$$

Se una superficie caratterizzata da un coefficiente di riflessione (di rinvio) δ è sottoposta ad un illuminamento *E*, la sua Radianza sarà data da:

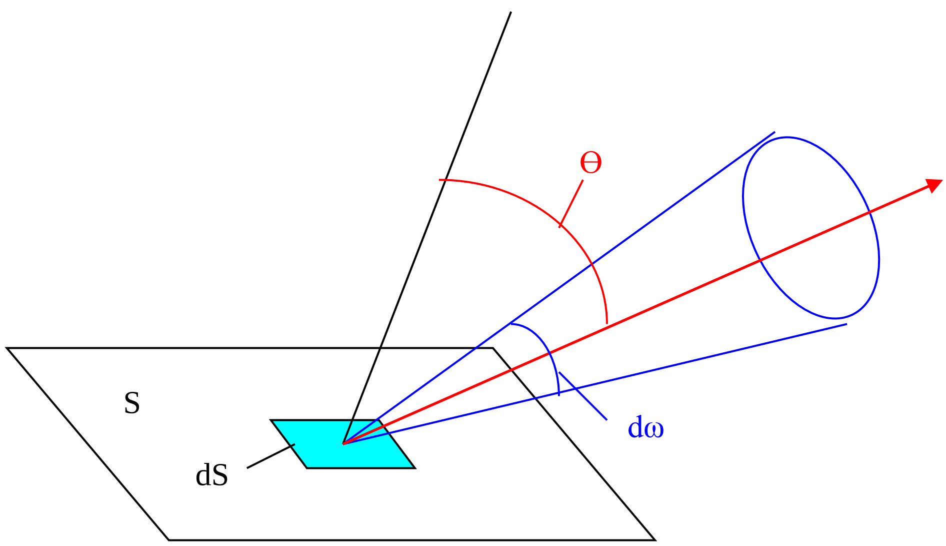
$$R = E \cdot \delta \text{ [lx]}$$

Se una superficie con coefficiente di trasparenza τ è sottoposta ad un illuminamento E, la sua radianza sul lato opposto a quello illuminato sarà data da:

$$R = E \cdot \tau \text{ [lx]}$$

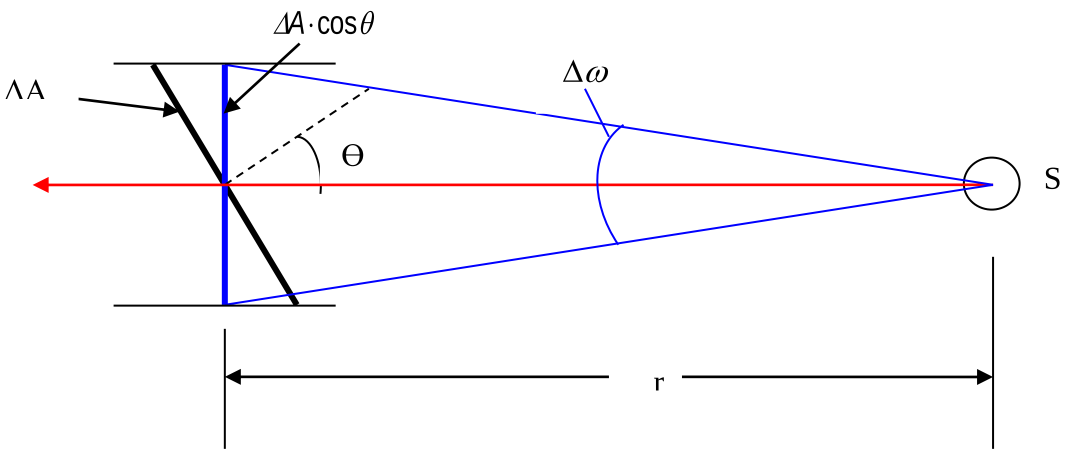
Si definisce **Luminanza (*L*)** di un punto *P* di una superficie emittente (*S*) e per una data direzione individuata dall'angolo θ (rispetto alla normale ad *S*), il rapporto tra il flusso luminoso elementare emesso nella direzione θ ed il prodotto delle seguenti grandezze: l'angolo solido elementare $d\omega$ uscente da *P* e contenente la direzione θ entro cui viene emesso il flusso relativo alla direzione, l'area apparente nella stessa direzione della superficie elementare contenente P ($dS \cdot \cos\theta$).
Se si tiene conto della definizione di intensità luminosa la Luminanza può anche essere definita come il rapporto tra l'intensità luminosa nella direzione θ e l'areola apparente $dS \cdot \cos\theta$.
La Luminanza si misura in candele per metro quadro (cd/m^2) o Nit.

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS \cdot \cos\theta \cdot d\omega} = \frac{dI}{dS \cdot \cos\theta} \text{ [cd/m}^2\text{]}$$



PRINCIPALI RELAZIONI FOTOMETRICHE

Relazione tra l'illuminamento prodotto da una sorgente puntiforme S su una superficie ΔA ed intensità luminosa della sorgente.



L'angolo solido entro cui la sorgente puntiforme *S* "vede" la superficie ΔA è:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta A \cdot \cos\theta}{r^2}$$

l'illuminamento prodotto da *S* su ΔA (sul punto *P* al centro di ΔA) sarà:

$$E_P = \frac{d\Phi}{dA} = \frac{I \cdot d\omega}{dA} = I \cdot \frac{dA \cdot \cos\theta}{r^2} \cdot \frac{1}{dA} = \frac{I \cdot \cos\theta}{r^2} \quad (1)$$

Dunque l'illuminamento sul punto *P* della superficie ΔA dipende dall'intensità luminosa della sorgente nella direzione del punto, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza ed è massimo quando la radiazione incide normalmente sulla superficie ($\cos\theta = \cos 0 = 1$).

Legame tra Radianza e Luminanza dei corpi emittenti secondo la Legge di Lambert.
Data una superficie *S* di area *A*, se su di essa la *R* è uniforme e la *L* è uniforme e indipendente dalla direzione di osservazione, tale superficie è detta perfettamente diffondente o lambertiana.

Per l'uniformità di *R* sulla superficie si avrà: $R = \frac{d\Phi}{dA} = \frac{\Phi}{A}$

(ovvero non ci sono variazioni di *R* tra un'areola di *S* e l'altra).

Analogamente, per l'uniformità di *L* sulla superficie si avrà: $L = \frac{dI}{dA \cdot \cos\theta} \rightarrow L \cdot \cos\theta = \frac{dI}{dA} = \frac{I}{A}$.

Se *L* è anche indipendente dalla direzione, allora l'intensità luminosa deve variare secondo la seguente legge, detta **legge di Lambert**:

$$I_{(\theta)} = I_N \cdot \cos\theta$$

dove I_N è l'intensità luminosa in direzione normale alla superficie S. Pertanto:

$$L_{(\theta)} = \frac{I_N \cdot \cos\theta}{A \cdot \cos\theta} = \frac{I_N}{A}$$

Il flusso luminoso emesso entro l'angolo solido elementare $d\omega$ relativo alla direzione individuata dagli angoli θ e φ è:

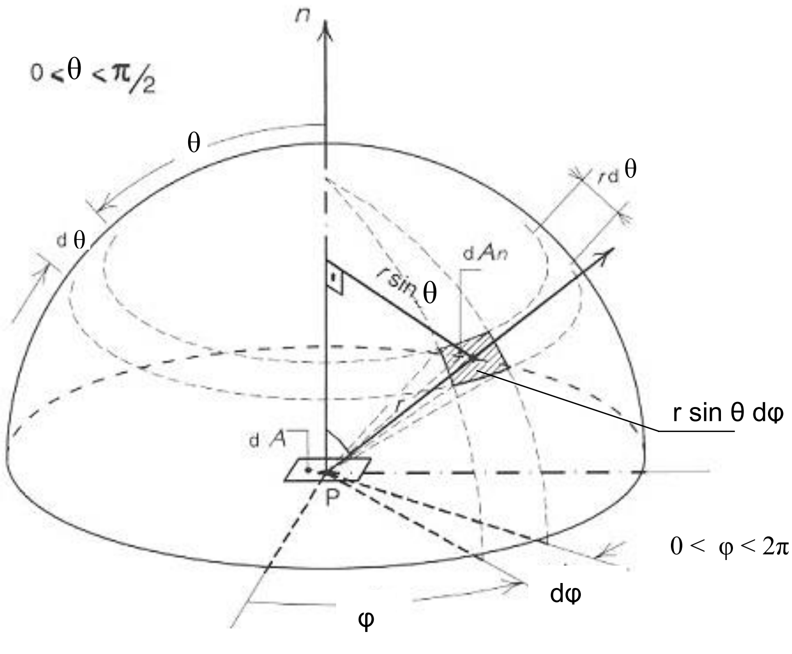
$$d\Phi = I_{(\theta)} \cdot d\omega = I_N \cdot \cos\theta \cdot d\omega$$

il flusso totale emesso dall'areola dA verso l'intero semispazio sarà ottenuto sommando tutti i contributi elementari di flusso $d\Phi$ emessi in 2π steradianti.

L'angolo solido elementare $d\omega$ è dato (per definizione) dal rapporto tra l'areola dA_n, su di un'emisfera con centro nel punto di riferimento *P* sulla superficie *S*, ed il raggio della emisfera al quadrato:

$$d\,\omega = \frac{d\,A_n}{r^2}$$

quest'areola può essere descritta come segue.



La lunghezza di un arco di circonferenza è pari al raggio per l'angolo sotteso, espresso in radianti. Pertanto il lato dell'areola che in figura appare verticale sarà pari a $r \cdot d\theta$, mentre il lato orizzontale sarà pari a: $r \cdot sin\theta \cdot d\varphi$.

L'areola dA_n può quindi essere calcolata come:

$$dA_n = r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot r \cdot d\theta = r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \tag{13.4}$$

Ne segue che l'angolo solido $d\omega$ può essere determinato da:

$$d\omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \tag{13.5}$$

Il flusso luminoso totale emesso dall'areola *dA* con centro in P verso il semispazio sarà quindi ricavato per integrazione:

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} I_N \cdot \cos\theta \cdot sen\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \right) = \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \pi \cdot I_N \cdot sen\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \left[\pi \cdot I_N \cdot sen^2\theta \right]_0^{\pi/2} = \pi \cdot I_N$$

La prima integrazione rispetto a $d\varphi$ fornisce l'angolo solido relativo alla corona sferica di spessore $d\theta$ indicata in figura (che è pari a $2 \cdot \pi \cdot sen\theta \cdot d\theta$) e la sua proiezione sul piano equatoriale della semisfera (che è pari a $2 \cdot \pi \cdot sen\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$), la seconda integrazione fornisce l'angolo solido proiettato relativo al semispazio visto dal punto P (che è pari a π).

Pertanto per una superficie perfettamente diffondente la Radianza sarà:

$R = \dfrac{\Phi}{A} = \dfrac{\pi \cdot I_N}{A}$ e dal momento che $L = \dfrac{I_N}{A}$ si avrà: $R = \pi \cdot L$

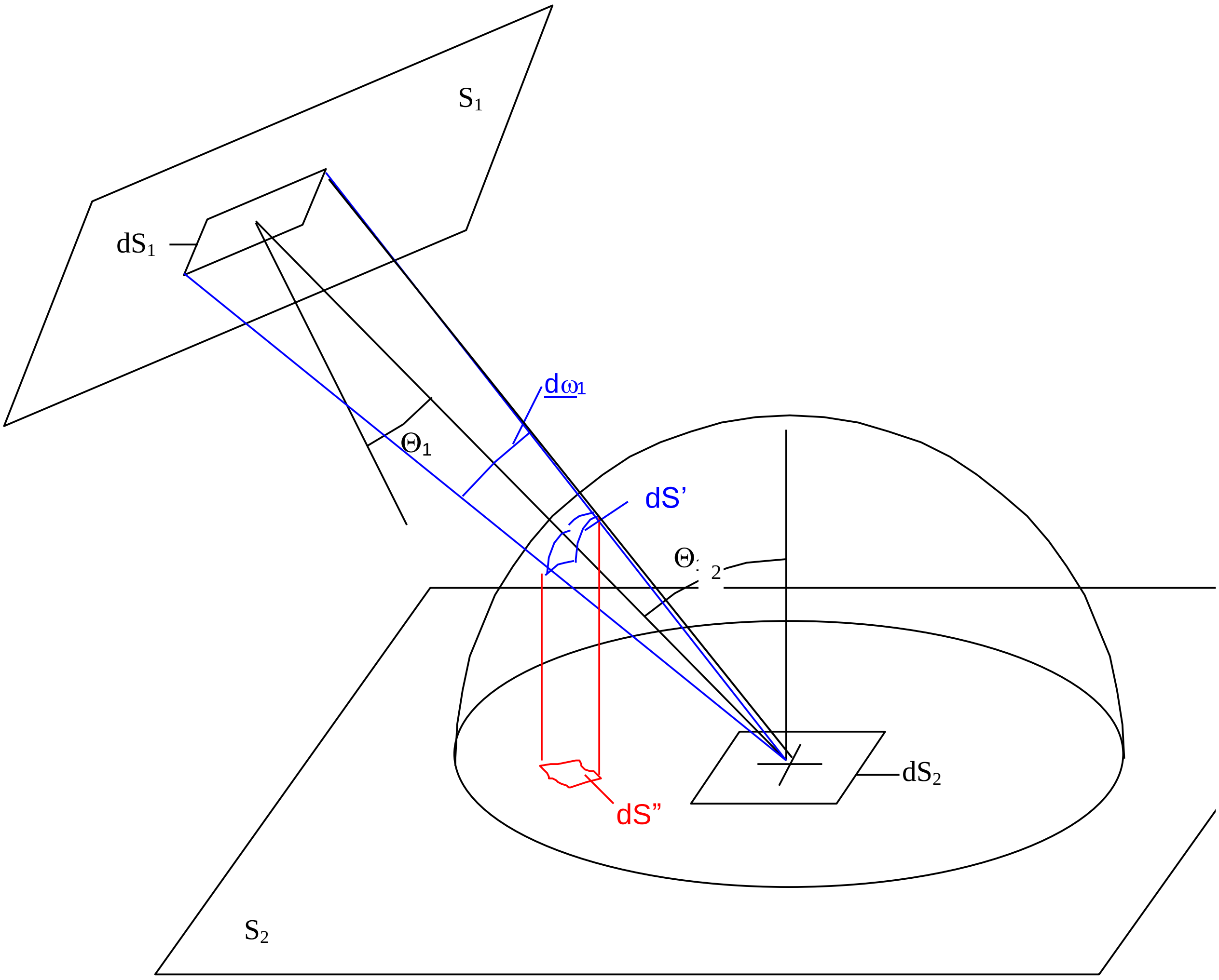
Radianza e Luminanza delle superfici perfettamente diffondenti sono tra loro proporzionali (secondo la costante π).

ILLUMINAMENTO PRODOTTO DA SUPERFICI ESTESE.

L'Illuminamento prodotto in un punto da una sorgente illimitata è pari allla Radianza di quest'ultima.

Considerando una sorgente luminosa costituita da una superficie infinitamente estesa S_1 che illumina un punto P situato su un'altra superficie S_2, ogni area elementare di S_1 produce su P un contributo di illuminamento dE_P che sarà dato da:

$$dE_P = \frac{d\Phi_{1,2}}{dS_2} = \frac{dI_{dS1} \cdot d\omega_2}{dS_2} \quad (2)$$



essendo:

$$L_{dS1} = \frac{d^2\Phi_{1,2}}{dS_1 \cdot \cos\Theta_1 \cdot d\omega_2} = \frac{dI_{dS1}}{dS_1 \cdot \cos\Theta_1} \rightarrow dI_{dS1} = L_{dS1} \cdot dS_1 \cdot \cos\Theta_1$$

e

$$d\omega_2 = \frac{dS_2 \cdot \cos\Theta_2}{r^2}$$

con r = distanza fra i baricentri delle areole dS_1 e dS_2,

sostituendo queste ultime due relazioni nella (2) si avrà:

$$dE_P = \frac{L_{dS1} \cdot dS_1 \cdot \cos\Theta_1}{dS_2} \cdot \frac{dS_2 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} = \frac{L_{dS1} \cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2 \cdot dS_1}{r^2}$$

l'illuminamento totale su P dovuto all'intera superficie illuminante S_1 si ottiene integrando su S_1:

$$E_P = \int^{S_1} dE_P = \int^{S_1} \frac{L_{dS1} \cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2 \cdot dS_1}{r^2}$$

se la superficie S_1 è perfettamente diffondente la sua Luminanza sarà uguale in ogni suo punto pertanto la si può portare fuori dall'integrale:

$$E_P = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \quad (3)$$

ora il termine $\frac{dS_1 \cdot \cos\Theta_1}{r^2}$ rappresenta l'angolo solido $d\omega_1$ sotteso in P dall'areola dS_1, che è lo stesso angolo solido sotteso in P dall'areola dS' sulla semisfera di raggio unitario con centro in P. L'areola dS' è individuata sulla semisfera di raggio unitario dalla proiezione di dS_1 con centro in P.

Proiettando ortogonalmente questa areola dS' sul piano equatoriale della semisfera di raggio unitario, che è il piano contenente la superficie S_2, si ottiene l'areola dS"= $dS' \cdot \cos\Theta_2$ (angolo solido proiettato), che rappresenta geometricamente l'argomento dell'integrale.

Pertanto, se S_1 è infinitamente estesa, si può scrivere:

$$E_P = L \cdot \int^{S_1} dS'' = \pi \cdot L$$

in tal caso infatti l'integrale di dS" sarà rappresentato da un'area S" coincidente con l'area del cerchio–proiezione dell'intera semisfera sul suo piano equatoriale (giacente sulla superficie S_2), cerchio di area $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

Come si è precedentemente dimostrato $\pi \cdot L$ è la Radianza della superficie S_1, pertanto:

$$E_P = \pi \cdot L = R_1$$

come volevasi dimostrare.

(Il ragionamento fin qui esposto si può applicare anche a superfici limitate purchè lambertiane…. E trova larga applicazione ad esempio nei problemi di illuminazione naturale, almeno quando la volta celeste può essere assimilata ad una superficie radiante infinitamente estesa che emette …*)*

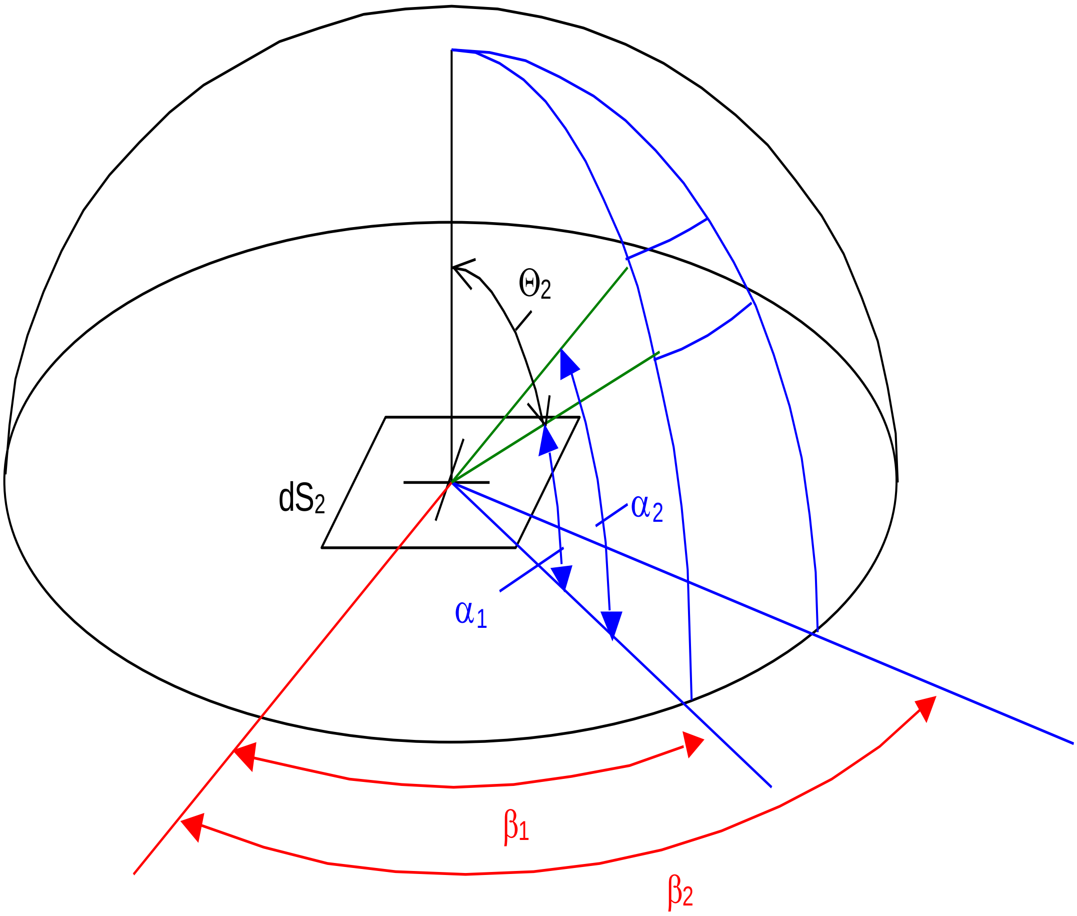
Quando invece la superficie illuminante anziché essere infinitamente estesa è limitata ma sempre lambertiana, si può seguire lo stesso procedimento fin qui descritto, la superficie S" non occuperà l'intero cerchio - proiezione della semisfera, ma rappresenterà sempre l'"angolo solido proiettato" relativo alla superficie illuminante. Moltiplicando questo per la Luminanza della superficie si otterrà l'illuminamento ad essa dovuto.

Pertanto si può asserire che l'illuminamento prodotto su un punto P da una superficie con L uniforme ed indipendente dalla direzione di osservazione (superficie lambertiana) dipende dalla L della superficie e dalla estensione apparente della superficie illuminante vista da P, ovvero dall'entità del relativo angolo solido proiettato (superficie S").

Il metodo fin qui esposto trova larga applicazione nello studio di problemi di illuminazione naturale, almeno nei casi in cui la volta celeste può essere assimilata ad una superficie radiante

infinitamente estesa che emette con Radianza uniforme ed indipendente dalla direzione (cielo coperto uniforme).
In casi del genere dovendo calcolare ad esempio l'illuminamento in un punto P situato in un interno, le superfici illuminanti sono costituite dalle parti di volta celeste visibili attraverso le superfici finestrate. In genere l'area S' relativa ad una finestra può essere calcolata come l'integrale di areole dS' calcolate come segue:

$$dS' = \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta$$



pertanto:

$$E_P = L \cdot \int dS'' = L \cdot \int^{S'} dS' \cdot \cos\Theta_2 = L \cdot \int^{S'} \cos\Theta_2 \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta$$

dato che:

$\Theta_2 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ si avrà che $\cos\Theta_2 = sen\alpha$

quindi:

$$E_P = L \cdot \int^{S'} sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta$$

e, dato che lungo i lati verticali della proiezione della finestra sulla sfera di raggio unitario l'angolo β è costante

$$E_P = L \cdot \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot \int_{\beta 1}^{\beta 2} d\beta = \frac{L}{2} \cdot \left(sen^2\alpha_2 - sen^2\alpha_1\right) \cdot \left(\beta_2 - \beta_1\right)$$

FATTORI DI VISTA E CALCOLO DELL'ILLUMINAMENTO.

Come si è visto, in generale l'illuminamento in P dovuto ad una generica superficie lambertiana S_1 è dato dalla (3). Ora il flusso luminoso che da S_1 arriva all'areola dS_2 , contenente P, sarà ricavabile come segue:

$$\Phi_{S1-dS2} = E_{dS_2} \cdot dS_2 = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

ed il flusso totale che da S_1 arriva su S_2 si otterrà integrando su quest'ultima superficie:

$$\Phi_{S1-S2} = \int^{S_2} E_{dS_2} \cdot dS_2 = L \cdot \int^{S_2}\int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

Mentre il flusso totalmente emesso da S_1, sarà dato dal prodotto della sua Radianza (costante sulla superficie) per la sua estensione: $S_1 \cdot R = S_1 \cdot \pi \cdot L$.

Ricordando la definizione di Fattore di Vista (FV), se si divide per il flusso cha va da S_1 ad S_2 per quello totalmente emesso da S_1 si ottiene appunto il Fattore di Vista da S_1 ad S_2 (FV_{S1-S2}):

$$FV_{S1-S2} = \frac{L \cdot \int^{S_2}\int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2}{S_1 \cdot \pi \cdot L} = \frac{\int^{S_2}\int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2}{S_1 \cdot \pi}$$

tornando ora a considerare l'areola dS_2 contenente P, il Fattore di vista da S_1 a dS_2 sarà più semplicemente:

$$FV_{S1-dS2} = \frac{L \cdot \int^{S_1} \frac{\cdot \cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2}{S_1 \cdot \pi \cdot L}$$

da cui:

$$S_1 \cdot \pi \cdot L \cdot FV_{S1-dS2} = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

ricordando il rapporto tra radianza e luminanza delle superfici lambertiane (la loro prorzionalità secondo pigreca) si può scrivere:

$$S_1 \cdot R \cdot FV_{S1-dS2} = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2 \qquad (4)$$

tra dS_2 e la superficie S_1 varrà il teorema della reciprocità per il quale:

$$S_1 \cdot FV_{S1-dS2} = dS_2 \cdot FV_{dS2-S1}$$

sostituendo nella (4):

$$R \cdot dS_2 \cdot FV_{dS2-S1} = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 \cdot dS_2$$

dividendo tutto per dS_2 e ricordando la (3) si avrà:

$$R \cdot FV_{dS2-S1} = L \cdot \int^{S_1} \frac{\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2}{r^2} \cdot dS_1 = E_p$$

dunque l’illuminamento in P dovuto ad S_1 può essere espresso sia dalla (3) che dal prodotto della Radianza di S_1 per il FV_{dS2-S1} che possiamo anche denominare FV_{P-S1}

E l’illuminamento in P dovuto ad una serie di *n* superfici sarà dato dalla sommatoria:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot FV_{P-Si}$$