

11. LO SCAMBIO TERMICO PER CONDUZIONE

11.1 Premessa: i meccanismi di trasmissione del calore

In Termodinamica si è definito il calore come la forma assunta dall'energia in transito quando la sua trasmissione da un corpo ad un altro avviene solo in virtù di una differenza di temperatura.

L'insieme dei processi mediante i quali ha luogo tale trasporto di energia viene studiato da una disciplina distinta dalla Termodinamica che prende il nome di **Trasmissione del calore**. Essa, basandosi sui concetti fondamentali della Termodinamica, studia l'evoluzione nel tempo degli eventi generati da stati di non equilibrio termico.

Anche questa branca della fisica ha un forte carattere sperimentale, e proprio dall'osservazione sperimentale dei fenomeni termici si è rilevato che lo scambio termico tra corpi, aventi temperatura diversa, può avvenire:

- per contatto in assenza di moto relativo tra due corpi;
- per contatto in presenza di moto relativo tra un corpo ed un fluido;
- senza contatto tra corpi separati da uno spazio anche vuoto.

In tutti questi casi l'osservazione sperimentale del fenomeno mostra che le temperature dei due corpi cambiano nel tempo fino a quando entrambi raggiungono la stessa temperatura, il cui valore risulta intermedio tra quelli delle loro temperature iniziali. L'osservazione sperimentale evidenzia anche che diminuisce la temperatura del corpo più caldo e contemporaneamente aumenta la temperatura di quello più freddo.

Si è osservato inoltre che la trasmissione del calore è un fenomeno complesso, in genere costituito dalla sovrapposizione degli effetti di più fenomeni elementari ognuno dei quali può avere un ruolo prevalente o marginale a seconda delle proprietà del mezzo in cui ha luogo la trasmissione del calore. In ogni caso si distinguono tre diversi modi o meccanismi di trasmissione detti rispettivamente: **conduzione**, **convezione**, **irraggiamento**. Essi saranno descritti in questo e nei prossimi capitoli.

11.2 La conduzione termica

Da un punto di vista macroscopico, la conduzione termica si manifesta come scambio di energia termica all'interno di corpi o tra corpi *solidi, liquidi o gassosi*, **in contatto** tra di loro, **senza movimento macroscopico di materia**.

Lo scambio termico è dovuto alla **cessione di energia cinetica molecolare (rotazionale e vibrazionale) da zone a più alta temperatura verso zone adiacenti a più bassa temperatura**. Nel caso particolare dei **solidi metallici**, oltre a tale meccanismo si deve considerare anche la componente di energia trasportata grazie al **moto degli elettroni**.

L'entità dell'energia termica, che si scambia o che si propaga nel corpo considerato, dipende dalla geometria e dalle caratteristiche fisiche di esso oltre che dalla differenza di temperatura

tra le regioni del corpo interessate allo scambio termico. Per esempio, se si riveste un serbatoio di acqua bollente con lana di vetro (materiale isolante termico), si riduce progressivamente l'entità della dispersione termica con l'aumentare dello spessore dell'isolante. Tale dispersione dipenderà inoltre dalla differenza di temperatura tra acqua ed ambiente circostante e dall'estensione dell'area disperdente.

11.3 Il postulato di Fourier

Per iniziare lo studio della conduzione e fissare alcuni concetti fondamentali è utile ripercorrere le esperienze di uno scienziato francese del XIX secolo, *Jean Fourier* (1768 – 1830), e considerare un sistema molto semplice, costituito da una barretta cilindrica di materiale omogeneo (struttura del materiale uniforme in ogni punto) ed isotropo (proprietà termofisiche indipendenti dalla direzione).

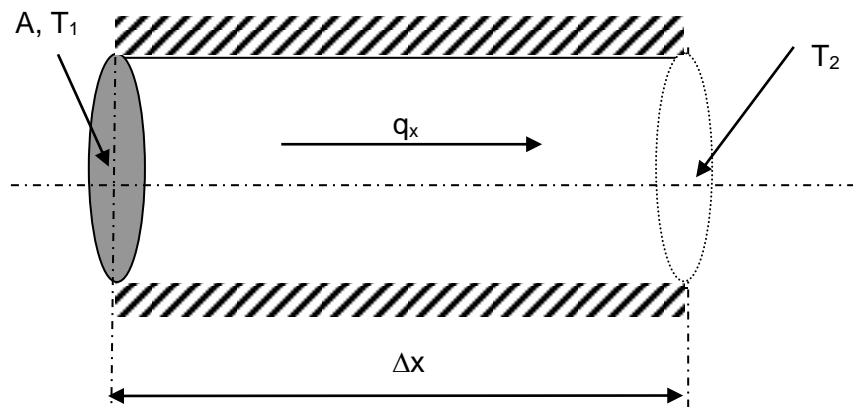


Figura 11.1. Flusso termico attraverso una barretta cilindrica.

Le estremità della barretta siano costituite da due superfici piane parallele a distanza Δx , mantenute a temperature diverse ed uniformi T_1 e T_2 , con:

$$T_1 > T_2 \quad T_1 - T_2 = \Delta T$$

Si consideri il corpo ben isolato lungo tutto l'involuppo in modo che il flusso avvenga solo nella direzione del suo asse: flusso monodimensionale. La differenza di temperatura causa un flusso di potenza termica q_x attraverso la sezione A ; si riscontra che:

$$q_x \propto A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (11.1)$$

si osserva quindi una proporzionalità diretta tra flusso termico, differenza di temperatura ed area della sezione A , ed una proporzionalità inversa tra flusso termico e lunghezza della barra. Il fattore di proporzionalità è detto **coefficiente di conduzione termica** o **conduttività termica del materiale** λ . Tale coefficiente è una proprietà fisica del materiale e ne caratterizza il *comportamento*, si misura in $W/(m \cdot K)$.

Quanto affermato dalla (11.1) può allora essere riscritto come:

$$q_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (11.2)$$

in cui il segno meno sta ad indicare che la direzione del flusso termico, se concorde con il verso crescente dell'asse delle ascisse, deve comunque corrispondere al decrescere della temperatura. In altri termini: la trasmissione del calore avviene nel senso del gradiente negativo della temperatura, ovvero **dalla zona più calda a quella più fredda**, in accordo con il secondo principio della termodinamica.

Questa relazione (11.2) è nota come **postulato di Fourier**.

In forma differenziale, l'equazione (11.2) può essere scritta nel seguente modo:

$$q_x = -\lambda \cdot A \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11.3)$$

Nel corpo cilindrico sopra descritto si avranno delle superfici a temperatura costante che approssimativamente possono essere individuate nei piani perpendicolari all'asse del cilindro. Si osserva quindi che il flusso termico si propaga in direzione perpendicolare alle superfici isoterme. In altri termini lungo la direzione di massima variazione della temperatura, o, in termini matematici, lungo la direzione del vettore gradiente di temperatura.

Tale condizione ha una validità generale: su di un corpo qualsiasi una volta individuata una superficie isoterma il flusso di calore si propagherà in ogni punto in direzione perpendicolare a tale superficie.

Si consideri allora su di una superficie isoterma alla temperatura T , un elemento di area ΔA contenente un punto P . Considerando la normale n alla superficie in P e l'isoterma a temperatura $T+\Delta T$, che sulla normale identifica il segmento Δn , trascurando il flusso termico disperso lateralmente dal cilindro di base ΔA ed altezza Δn così identificato (vedi Figura 11.3), si può scrivere:

$$q = -\lambda \cdot \Delta A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta n} = -\lambda \cdot \Delta A \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (11.4)$$

al tendere a zero dell'area ΔA , il flusso può essere così descritto:

$$q^* = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} q = -\lambda \cdot dA \cdot \frac{\partial T}{\partial n}$$

consideriamo ora il flusso termico specifico (per unità di superficie) q^* :

$$q^* = \frac{q}{dA} = -\lambda \cdot \frac{dA}{dA} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (11.5)$$

A partire da tale relazione e considerando il fatto che il flusso termico è un vettore diretto normalmente alla superficie isoterma considerata, la relazione (11.5) può essere scritta in

termini vettoriali in relazione ad un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale in cui la superficie ha una posizione generica, e per unità di area della superficie si avrà:

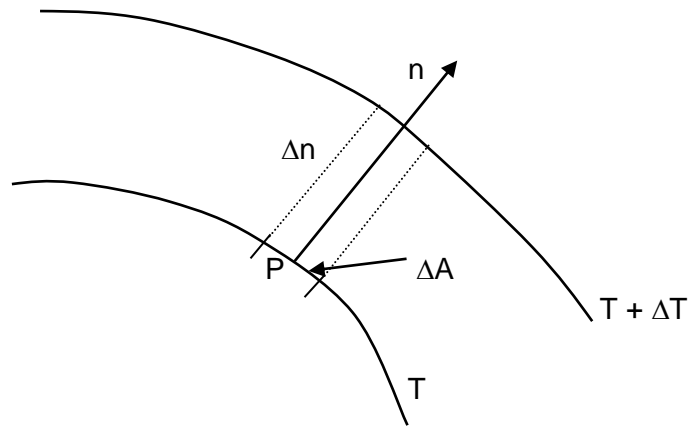


Figura 11.3. Direzione del flusso termico.

$$q^* = -\lambda \cdot \nabla T = -\lambda \cdot \left[\vec{i} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (11.6)$$

in cui i, j, k sono i versori dei tre assi cartesiani ortogonali. In pratica quest'ultima espressione dice semplicemente che il flusso termico in una direzione generica (rispetto agli assi del sistema di riferimento) risulta dalla combinazione delle sue tre componenti secondo gli assi.

11.4 Il coefficiente di conduzione termica λ

Il valore del coefficiente di conduzione termica o **conduttività** termica λ delle diverse sostanze varia entro limiti larghissimi, esso dipende dallo stato del materiale e può variare con la temperatura, la pressione e gli eventuali trattamenti termici che il materiale ha subito. La conduttività termica, come detto, si misura, nel sistema internazionale (SI), in W/(m·K). La tabella 11.1 riporta a grandi linee i valori della conduttività λ per le diverse classi di sostanze. La tabella 11.2 riporta i valori della conduttività termica in unità del Sistema Internazionale per sostanze di frequente utilizzo.

Tabella 11.1. Alcuni valori della conduttività termica

| Materiale | λ [W/(m·K)] |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <i>Gas alla pressione atmosferica</i> | 0,007 ÷ 0,2 |
| <i>Materiali isolanti</i> | 0,02 ÷ 0,2 |
| <i>Liquidi non metallici</i> | 0,05 ÷ 0,7 |
| <i>Solidi non metallici</i> | 0,3 ÷ 2,3 |
| <i>Metalli liquidi</i> | 8 ÷ 80 |
| <i>Metalli e leghe metalliche</i> | 14 ÷ 420 |

Tabella 11.2. Conduttività termica per alcuni materiali λ [W/(m·K)]

| | | |
|---------------------------------|-----------|---------|
| Acqua | | |
| liquido | 0,6 | W/(m·K) |
| ghiaccio | 1,8 | W/(m·K) |
| neve | 0,02 ÷ 1 | W/(m·K) |
| Legno | | |
| | 0,15 | W/(m·K) |
| Balsa | 0,055 | W/(m·K) |
| Aria | 0,026 | W/(m·K) |
| Materiali isolanti | | |
| Polistirolo espanso | 0,024 | W/(m·K) |
| Sughero espanso | 0,036 | W/(m·K) |
| Lana di vetro | 0,04 | W/(m·K) |
| Fibra di vetro | 0,035 | W/(m·K) |
| Materiali da costruzione | | |
| Calcestruzzo | 0,8 ÷ 1,4 | W/(m·K) |
| Mattoni di argilla | 1,0 ÷ 1,2 | W/(m·K) |
| Marmo | 2,8 | W/(m·K) |
| Sabbia | 0,27 | W/(m·K) |
| Terreno | 0,52 | W/(m·K) |
| Alluminio | 200 | W/(m·K) |
| Vetro | 1,4 | W/(m·K) |
| Grafite | 1950 | W/(m·K) |
| Diamante | 2300 | W/(m·K) |

11.4 L'Equazione Generale della conduzione

Nel paragrafo 11.3 si è considerato schematicamente il caso più semplice della conduzione termica: materiale omogeneo ed isotropo, flusso monodimensionale, regime stazionario. Si cercherà nel seguito di fornire una trattazione più generale del fenomeno in grado di descrivere qualsiasi situazione sperimentale.

Come si è già sottolineato lo scambio di energia per conduzione avviene per interazione diretta tra le molecole del mezzo che, ove esista un gradiente di temperatura, secondo le ipotesi della teoria cinetica molecolare si scambiano la loro energia cinetica rotazionale e vibrazionale. In seguito a tali scambi la quota di energia posseduta da ogni volumetto elementare del corpo si modifica e, di conseguenza, si modifica anche il campo delle temperature. Il fenomeno conduttivo è pertanto descritto quando sia noto il campo di temperatura all'interno del corpo, campo che è in generale funzione delle coordinate spaziali x , y , z e del tempo τ .

Lo studio del fenomeno richiede pertanto la precisazione della funzione scalare:

$$T = f(x, y, z, \tau) \quad (11.7)$$

Il luogo geometrico dei punti del corpo che in un certo istante del tempo τ hanno la medesima temperatura è una superficie isoterma. Le superfici isoterme non si intersecano mai tra loro in quanto un punto, in un certo istante, può avere un solo valore di temperatura.

Si osserva facilmente che in regime stazionario, cioè indipendente dal tempo, le superfici isoterme sono fisse: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero identiche fra loro.

In regime variabile, invece, le superfici isoterme sono mobili e deformabili: ciò significa che, se si immagina di poter fotografare in istanti successivi la loro configurazione all'interno del corpo, le immagini che si otterrebbero risulterebbero diverse istante per istante.

L'intersezione di un piano con le superfici isoterme determina su quel piano delle curve o linee isoterme che, come le superfici, sono continue e non possono intersecarsi tra loro: il maggior gradiente di temperatura si incontra attraversando le linee isoterme in una direzione n normale ad esse.

Per esplicitare la (11.7), una possibile tecnica è quella di eseguire **un bilancio di energia su un elemento infinitesimo di volume di un generico corpo**. Si consideri un mezzo omogeneo sul quale si vada a considerare un elemento infinitesimo di volume dV (Figura 11.4). La forma generale dell'equazione di conservazione dell'energia, limitatamente ai soli flussi termici, fornisce:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (11.8)$$

in cui:

\dot{E}_{in} = potenza termica in ingresso [W];

\dot{E}_{out} = potenza termica in uscita [W];

\dot{E}_g = potenza termica generata [W];

\dot{E}_{st} = potenza termica immagazzinata [W].

Considerando come superficie di controllo quella che delimita il volumetto $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, si può procedere a esplicitare la relazione (11.8):

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{E}_g - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \dot{E}_{st}$$

Dove i primi tre termini q_x, q_y, q_z rappresentano i flussi termici in entrata secondo la direzione di ciascun asse, ognuno perpendicolare ad una faccia del volumetto, ed termini $q_{x+dx}, q_{y+dy}, q_{z+dz}$ sono relativi ai flussi termici in uscita secondo ogni direzione attraverso la faccia opposta. Questi ultimi sono esprimibili espandendo in serie di *Taylor* il flusso entrante secondo una stessa direzione e limitandosi con buona approssimazione ai primi due termini:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx ; \quad q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy ; \quad q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

In pratica queste espressioni ci dicono che i flussi uscenti sono pari al flusso in entrata più la sua variazione lungo la direzione considerata, espressa dalla sua derivata prima.

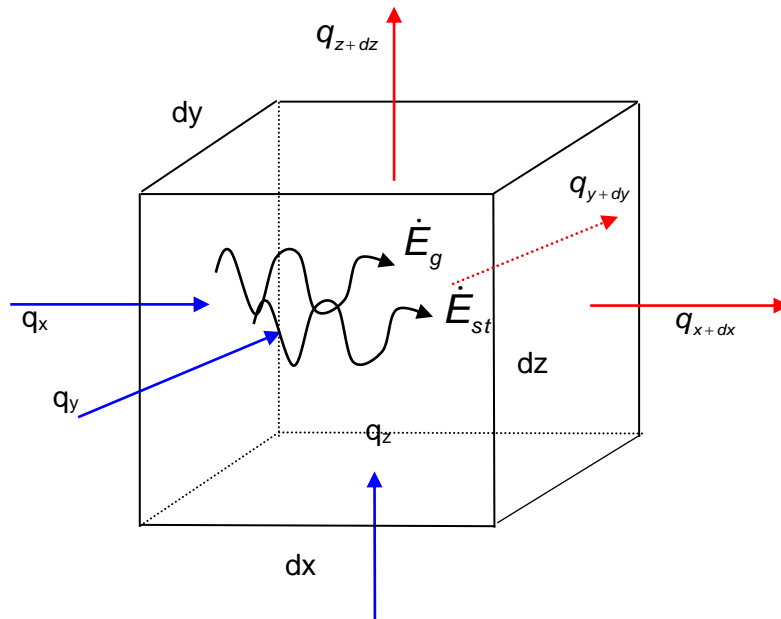


Figura 11.4. Bilancio sull'elemento infinitesimo dV

Tutti questi termini sono flussi termici puramente conduttivi e perciò devono essere valutati con la legge di *Fourier*, secondo la quale:

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz ; \quad q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot dx \cdot dz ; \quad q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot dy \cdot dx$$

dove i prodotti $dy \cdot dz$, $dx \cdot dz$ e $dy \cdot dx$ rappresentano le aree delle facce del volumetto attraversate dai flussi in ogni direzione. Pertanto i termini in uscita sono determinati come:

$$q_{x+dx} = - \left[\lambda \cdot (dy \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot (dy \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx \right]$$

$$q_{y+dy} = - \left[\lambda \cdot (dx \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot (dx \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dy \right] \quad (11.9)$$

$$q_{z+dz} = - \left[\lambda \cdot (dx \cdot dy) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot (dx \cdot dy) \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot dz \right]$$

Lungo ogni direzione il flusso netto sarà pari alla differenza tra il flusso entrante e quello uscente, dunque:

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot (dy \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Analogamente per le altre direzioni:

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Per quanto riguarda la generazione interna, ipotizzando che H sia la generazione di potenza termica per unità di volume [W/m^3], uniforme in tutto il volume infinitesimo dV , si può ricavare:

$$\dot{E}_g = H \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Mentre per la potenza termica immagazzinata si deve tener conto della massa δM del materiale considerato; tale massa si può esprimere come prodotto della densità ρ per il volume dV :

$$\delta M = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

e la potenza termica immagazzinata sarà determinata dalla variazione della temperatura nel tempo τ per il calore specifico c del materiale (se solido $c = c_p$), ovvero pari alla variazione temporale dell'energia interna U della sostanza:

$$\dot{E}_{st} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (11.10)$$

L'Equazione generale della conduzione (11.8) nella forma più generale, diviene, con le assunzioni fatte e dividendo tutto per il volumetto $dx \cdot dy \cdot dz$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (11.11)$$

Se λ è costante nelle tre direzioni (mezzo omogeneo ed isotropo), è possibile rendere quest'equazione nella forma:

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

dividendo tutto per il prodotto $\rho \cdot c_p$ ed introducendo al posto del termine $\lambda/(\rho \cdot c_p)$ la **diffusività termica** che, nel Sistema Internazionale si misura in $[m^2/s]$ ed è indicata in letteratura con il simbolo "a", l'equazione assume la forma:

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{H}{\rho \cdot c_p} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (11.12)$$

La diffusività termica può essere vista come il rapporto tra la capacità che ha un materiale di condurre energia termica, e la sua capacità di accumulare energia. Un alto valore di diffusività termica indica una veloce propagazione dell'energia termica, mentre un valore basso, indica che nel materiale è preponderante l'accumulo. La Tabella 11.3 riporta i valori della diffusività termica per alcuni materiali.

Un'altra forma della stessa equazione è la seguente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{\lambda} = \frac{\rho \cdot c_p}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Se non c'è generazione interna di calore scompare il relativo termine e si ottiene (equazione di **Fourier**):

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Se il regime è stazionario, non c'è variazione di energia interna (temperatura costante nel tempo) è possibile dividere tutto per a e la relazione (11.12) diviene (equazione di **Poisson**):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{\lambda} = 0 \quad (11.13)$$

Senza generazione interna ed in regime stazionario si ottiene una forma più semplice (equazione di **Laplace**):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (11.14)$$

Tabella 11.3. Valore della diffusività termica a [m^2/s] per alcune sostanze

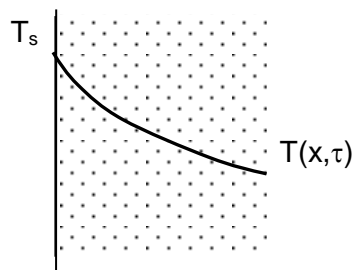
| Metalli | | | |
|-----------------------------|--|-----------------------------|---------|
| Oro | | 127×10^{-6} | m^2/s |
| Acciaio | | 4×10^{-6} | m^2/s |
| Alluminio | | 97×10^{-6} | m^2/s |
| Solidi non metallici | | | |
| Legno | | $20 \div 30 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Calcestruzzo | | $0,75 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Mattoni | | $0,52 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Vetro | | $0,34 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Legno (quercia) | | $0,13 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Aria | | | |
| | | $22,4 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| Acqua | | | |
| liquido | | $0,14 \times 10^{-6}$ | m^2/s |
| solido | | $1,2 \times 10^{-6}$ | m^2/s |

11.5 Le condizioni al contorno

Le relazioni ricavate nel paragrafo precedente hanno un significato fisico solo quando si siano specificate le caratteristiche geometriche del sistema e le condizioni termiche lungo i suoi confini che si considerano 'condizioni al contorno'. Se inoltre il sistema non è in regime stazionario sarà necessario specificare il suo stato termico all'istante iniziale del fenomeno osservato (condizioni Iniziali).

In maniera sintetica si riportano i diversi tipi di condizioni riscontrabili nella realtà sperimentale.

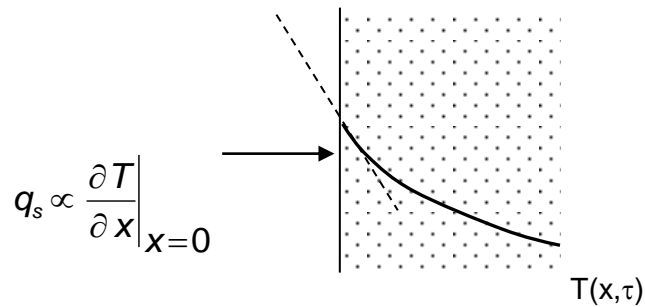
1. *Temperatura superficiale costante:* $T(x = 0, \tau) = T_s$
 Condizione di Dirichlet



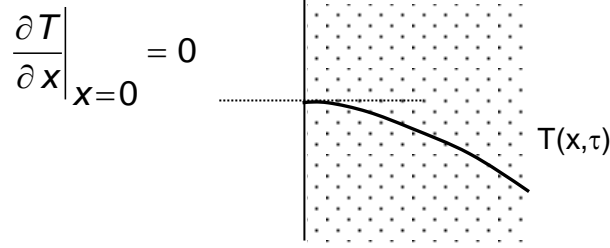
2. Flusso termico superficiale costante

a – flusso finito:

$$q_s'' = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

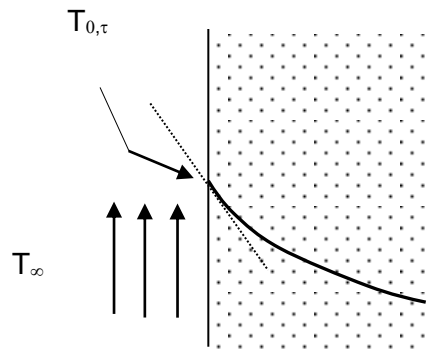


b – condizioni di adiabaticità (nessuno scambio termico superficiale, nessun gradiente di temperatura sulla superficie):



3. Scambio termico convettivo alla superficie

$$h \cdot [T_\infty - T_{x=0, \tau}] = -\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$



11.6 Alcune soluzioni dell'Equazione Generale della conduzione

A) Strato piano semplice

Si consideri uno strato piano semplice (Figura 11.5) in regime stazionario e senza generazione interna di calore. Lo strato considerato sia di spessore finito s [m] e alla superficie delle due facce si siano misurate le due temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$). Per esso valgono quindi le seguenti ipotesi:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad H = 0$$

Inoltre per il materiale considerato si possa ragionevolmente supporre λ indipendente dalla temperatura: Nel caso indicato vale l'equazione di **Laplace** (11.14):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

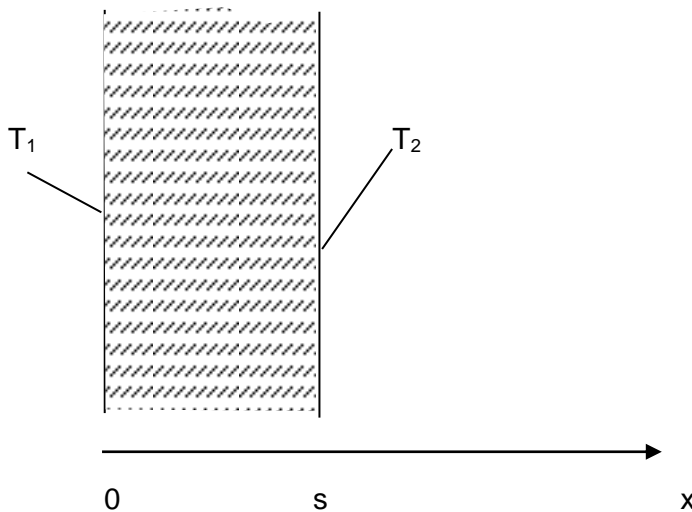


Figura 11.5. Strato piano semplice

Per una tale configurazione geometrica, nell'ipotesi che lo strato sia indefinitamente esteso nelle direzioni y e z , posso ritenere:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (11.15)$$

La temperatura dipende solamente dalla variabile x ; posso pertanto scrivere:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (11.16)$$

che risolta permette di ottenere, con una prima integrazione: $\frac{dT}{dx} = C_1$, quindi:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (11.17)$$

Fissati i seguenti valori per le condizioni al contorno (di primo tipo sulla temperatura) è possibile ottenere il valore delle costanti C_1 e C_2 :

$$\begin{aligned}
x = 0 &\Rightarrow T = T_1 \Rightarrow \text{dalla 11.17: } T_1 = C_2 \\
x = s &\Rightarrow T = T_2 \Rightarrow \text{dalla 11.17: } T_2 = C_1 \cdot s + C_2 \Rightarrow T_2 = C_1 \cdot s + T_1 \\
&\Rightarrow C_1 = (T_2 - T_1) / s
\end{aligned}$$

inserendo il valore delle costanti la 11.17 consente di ottenere l'andamento della temperatura lungo la direzione x:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{s} \cdot x \quad \rightarrow \quad T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} \cdot x \quad (11.18)$$

L'andamento della temperatura è pertanto rettilineo: la Figura 6 riporta l'andamento della temperatura nello strato e la direzione del flusso termico. Il flusso termico q , per la Legge di Fourier, è valutabile come:

$$q^* = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{s} \cdot (T_1 - T_2) \quad (11.19)$$

L'espressione (11.19) può essere scritta in modo leggermente differente:

$$q^* = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{s}{\lambda}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{t,cond}} \quad (11.20)$$

Nell'espressione (11.20) con $R_{t,cond}$ è stata indicata, in analogia con la legge di Ohm per le reti resistive elettriche, la **resistenza termica di conduzione**:

$$R_{t,cond} = \frac{s}{\lambda} \quad (11.21)$$

La resistenza termica alla conduzione di uno strato si misura in $[K \cdot m^2/W]$. Minore risulta la conduttività termica del materiale λ maggiore risulta la resistenza termica dello strato. La resistenza termica cresce in modo proporzionale allo spessore dello strato. Dall'espressione (11.20), è possibile scrivere:

$$R_{t,cond} = \frac{(T_1 - T_2)}{q} \quad (11.22)$$

$$q \cdot R_{t,cond} = (T_1 - T_2) \quad (11.23)$$

In altre parole, se il flusso è costante (dato regime stazionario) ad una maggiore resistenza di uno strato corrisponde una maggiore differenza tra le temperature delle sue due superfici estreme.

Ad uno strato piano semplice è riconducibile con buona approssimazione il caso di una parete piana semplice. La soluzione di questo caso trova applicazione nei casi più semplici di strutture edilizie delimitanti spazi abitati di cui, note le condizioni al contorno, si vogliono

determinare i flussi termici conduttivi (e convettivi) dispersi (caso invernale) o guadagnati (caso estivo).

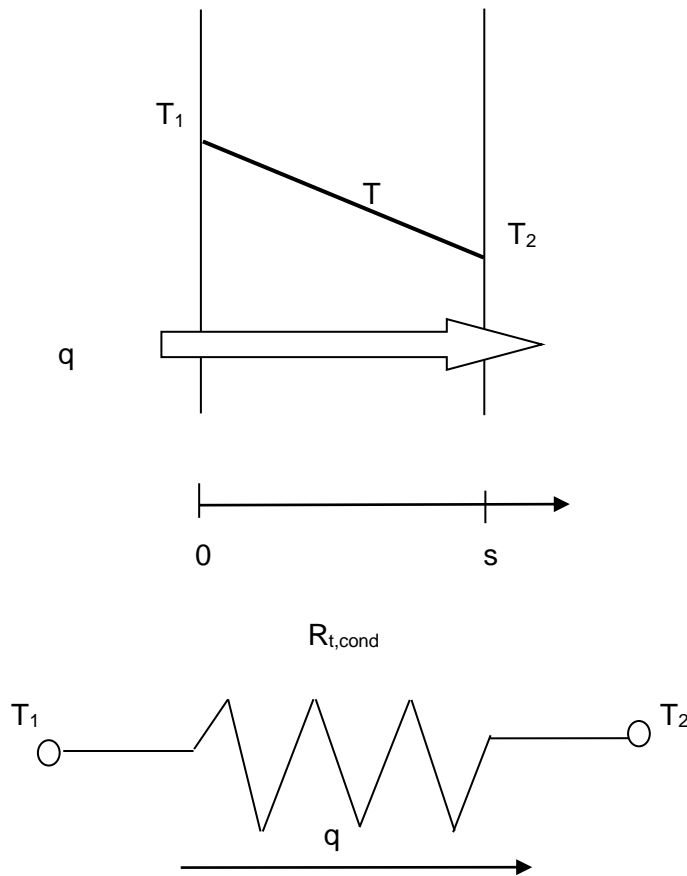


Figura 11.6. Andamento della temperatura e rappresentazione schematica di uno strato piano

B) Strato piano multiplo:

Si consideri un sistema costituito da più strati piani di area A come in Figura 11.7. I materiali siano di spessore e tipologia differente. La soluzione di questo caso può essere estesa ad un numero qualsivoglia di strati. Non essendovi generazione interna di energia termica, il flusso termico q^* che attraversa gli strati piani è sempre lo stesso (costanza del flusso), e può essere determinato con la relazione (11.20) applicata ad ognuno degli strati:

$$q^* = \frac{(T_1 - T_{s1})}{\frac{s_1}{\lambda_1}} = \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{\frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{(T_{s2} - T_2)}{\frac{s_3}{\lambda_3}} \quad (11.24)$$

dove:

T_{s1} = temperatura all'interfaccia tra gli strati 1 e 2;

T_{s2} = temperatura all'interfaccia tra gli strati 2 e 3;

λ_i = conduttività termica dello strato i-esimo;

s_i = spessore dello strato i - esimo

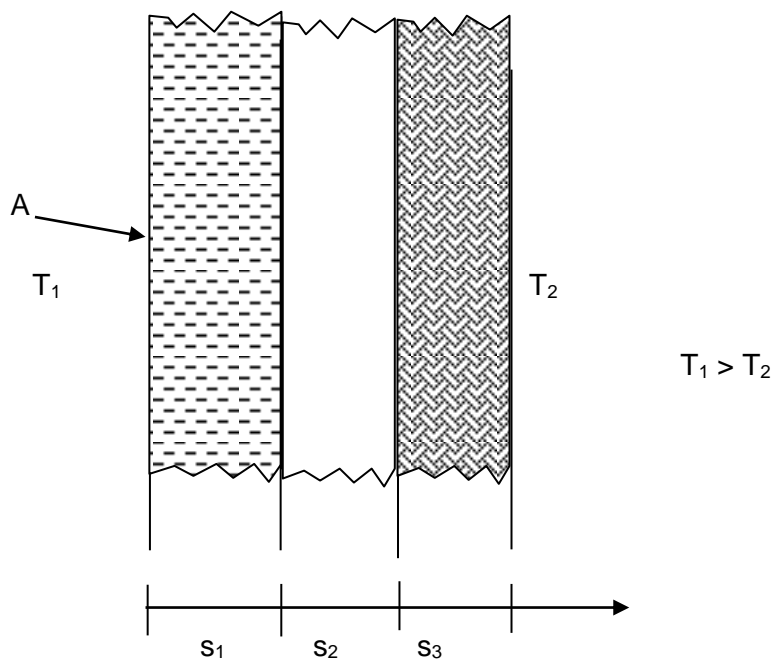


Figura 11.7. Strato piano multiplo (o composto)

La (11.24) rappresenta un sistema di tre equazioni, moltiplicando ogni equazione per il denominatore del secondo membro (che rappresenta la resistenza termica dello strato) e sommando membro a membro si ottiene:

$$q^* \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{s_i}{\lambda_i} = (T_1 - T_{s1}) + (T_{s1} - T_{s2}) + (T_{s2} - T_2)$$

quindi:

$$q^* = \frac{(T_1 - T_2)}{\sum_{i=1}^3 \frac{s_i}{\lambda_i}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{totale}} \quad (11.25)$$

in cui la resistenza totale di conduzione dei tre (o N) strati è calcolabile come:

$$R_{totale} = \sum_{i=1}^3 \frac{s_i}{\lambda_i} \quad \left[\frac{m^2 \cdot K}{W} \right] \quad (11.26)$$

Di utile applicazione (ad esempio ai fini della costruzione del Diagramma di Glaser) è la determinazione delle temperature di interfaccia T_{s1} e T_{s2} . Dalle relazioni (11.24) e (11.25), si ricava:

$$\frac{(T_1 - T_{s1})}{(T_1 - T_2)} = \frac{\frac{s_1}{\lambda_1}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} = \frac{R_{t,cond,1}}{R_{totale}} \quad (11.27)$$

$$(T_1 - T_{s1}) = (T_1 - T_2) \cdot \frac{\frac{s_1}{\lambda_1}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \quad (11.28)$$

$$T_{s1} = T_1 - \left[(T_1 - T_2) \cdot \frac{\frac{s_1}{\lambda_1}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \right] = T_1 - \left[(T_1 - T_2) \cdot \frac{R_{t,cond,1}}{R_{totale}} \right] = T_1 - q^* \cdot R_{t,cond,1} \quad (11.29)$$

Uguualmente:
$$T_{s2} = T_{s1} - \left[(T_1 - T_2) \cdot \frac{\frac{s_2}{\lambda_2}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \right] = T_{s1} - q^* \cdot R_{t,cond,2} \quad (11.30)$$

In generale, per ciascuno strato i-esimo, si può ricavare la relazione:

$$\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{tot}} = \frac{R_{t,cond,i}}{R_{totale}} \quad (11.31)$$

La Figura 11.8 riporta un esempio degli andamenti della temperatura in uno strato composto. Si noti che, se la resistenza di un singolo strato è elevata (ad esempio se il materiale è un isolante), la differenza tra le temperature alle estremità dello strato risulta elevata. Al contrario là dove la resistenza termica di conduzione è bassa, la differenza tra le temperature alle estremità dello strato è ridotta. Le relazioni trovate trovano logica applicazione nei casi di pareti piane multistrato.

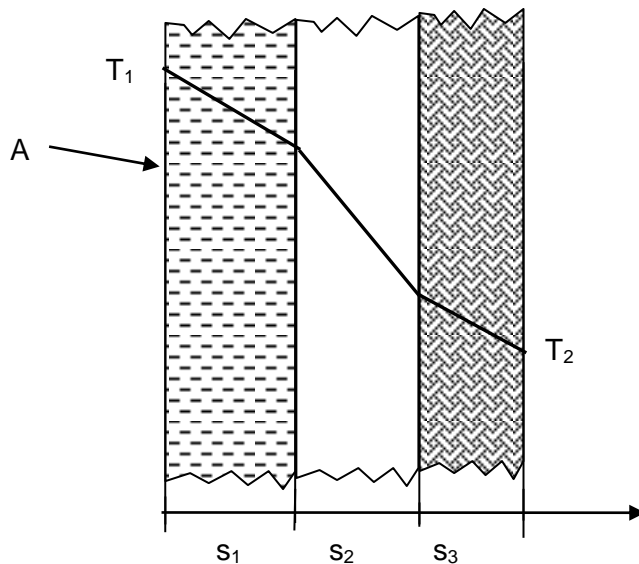


Figura 11.8. Esempio di profilo termico in uno strato piano composto (parete multistrato).

Note

A) Resistenza di contatto

Tra strati di materiali diversi, a causa del contatto imperfetto esistente a livello microscopico tra le superfici, all'interfaccia è in realtà rilevabile una differenza di temperatura ΔT che può essere apprezzabile. La rugosità superficiale infatti fa sì che lungo l'interfaccia si formino delle cavità che si comportano da isolante a causa della bassa conducibilità termica dell'aria in esse contenuta. Tale resistenza aggiuntiva rende conto pertanto di un accoppiamento imperfetto tra i materiali ed è schematizzabile con il termine resistenza di contatto R_c .

In genere, si preferisce indicare il valore della resistenza di contatto R_c al variare dei materiali in contatto termico tra loro. I valori sperimentali di tali resistenze termiche variano tra 0,00001 e 0,001 ($m^2 \cdot K/W$). La tabella 4 riporta i valori riscontrati per alcuni accoppiamenti. La Figura 11.9 mostra un esempio di profilo termico.

Tabella 11.4. Valori della resistenza di contatto per alcuni materiali metallici

| | |
|--------------------|---|
| Acciaio (in vuoto) | $R_c = 6 \div 25 \cdot 10^{-4} [m^2 \cdot K/W]$ |
| Rame (in vuoto) | $R_c = 1 \div 10 \cdot 10^{-4} [m^2 \cdot K/W]$ |

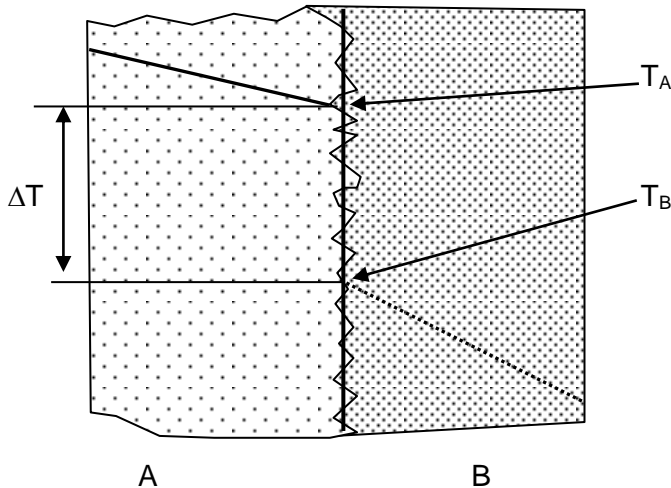


Figura 11.9. Esempio di profilo termico in presenza di una resistenza termica di contatto

B) Resistenza termica serie parallelo

In alcune strutture si può verificare che le resistenze termiche anziché in serie si presentino in parallelo o in una combinazione serie parallelo (vedi Figura 11.10). Tale può essere infatti una schematizzazione di alcune strutture edilizie complesse.

Per trattare una simile struttura è necessario ipotizzare la completa assenza di dispersioni termiche laterali, ovvero che il flusso termico sia sempre mono-direzionale il che equivale ad ipotizzare la completa adiabaticità delle superfici laterali. Inoltre le superfici anteriore e posteriore 1 e 2 devono essere entrambe ad una temperatura uniforme T_1 e T_2 rispettivamente con $T_1 > T_2$. La struttura può essere schematizzata infine come una rete resistiva equivalente formata da resistenze termiche in serie o in parallelo. La Figura 11.10 riporta il relativo schema. I valori delle singole resistenze termiche sono ricavabili dalla relazione (11.22). Il parallelo di due resistenze (nel caso la R_1 e la R_2) può essere valutato considerando:

$$q = \frac{\Delta T}{R_{parallelo}} \quad (11.32)$$

in cui ΔT è la differenza tra le temperature delle superfici delimitanti il parallelo ($\Delta T = T_1 - T_2$ in Figura 10). Il valore di $R_{parallelo}$, è ricavabile da:

$$\frac{1}{R_{parallelo}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{parallelo} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (11.33)$$

La resistenza totale dello strato sarà pari a:

$$R_{tot} = R_{parallelo} + R_3 \quad (11.34)$$

Naturalmente, si ha:

$$R_1 = \frac{s_1}{\lambda_1 \cdot A_1} ;$$

$$R_2 = \frac{s_2}{\lambda_2 \cdot A_2} ;$$

$$R_3 = \frac{s_3}{\lambda_3 \cdot A_3}$$

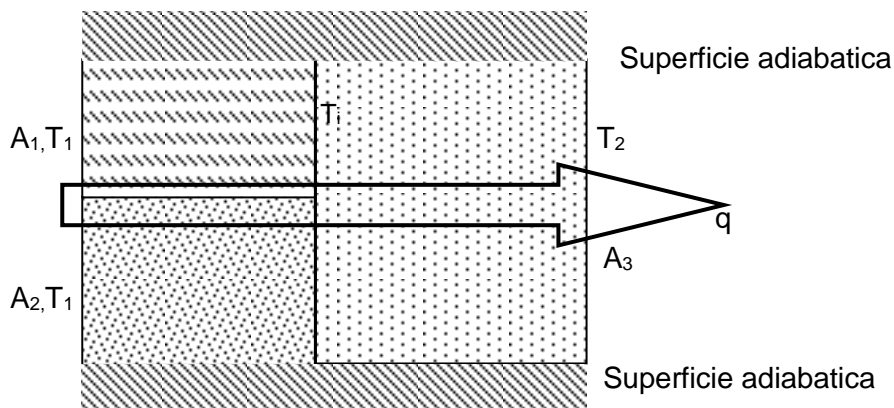


Figura 11.10. Rete di resistenze termiche: combinazione serie – parallelo.

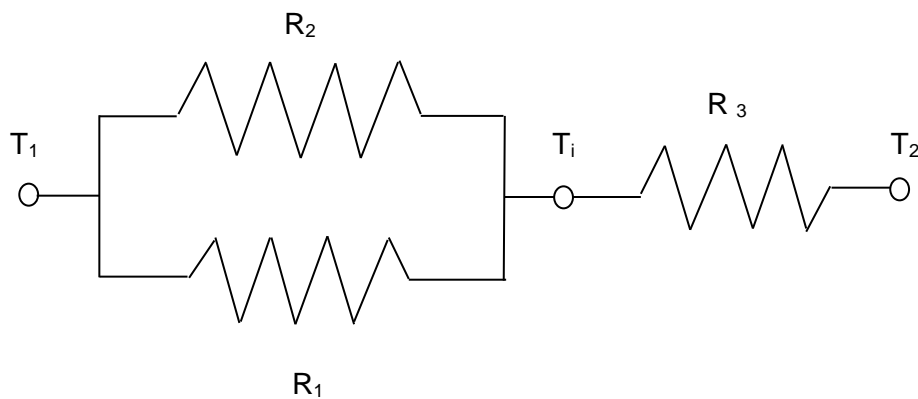


Figura 11.11. Schema della rete resistiva equivalente della struttura di Figura 11.9.

C) Resistenza convettiva

E' possibile considerare anche un'eventuale resistenza termica relativa allo scambio termico per convezione. Tale scambio si presenta all'interfaccia solido – liquido (o gas) ed è caratterizzato come si vedrà nel prossimo capitolo dall'equazione proposta da Newton:

$$q = h \cdot (T_{\text{parete}} - T_{\text{fluido}}) \quad (11.35)$$

in cui con h si indica, come si vedrà in seguito con maggior dettaglio, il coefficiente di scambio termico per convezione [$W/(m^2 K)$]. Come si vede, in analogia a quanto fatto per la conduzione, riferendosi alla relazione (11.20), è possibile definire una resistenza termica per convezione come:

$$R_{\text{conv}} = 1/ (h) \quad (11.36)$$

Tale resistenza è in serie con le resistenze conduttive di uno strato piano (semplice o multiplo). La differenza di temperatura, di riferimento per il calcolo del flusso termico, è in tal caso valutata rispetto ai due fluidi che delimitano la struttura (e alle temperature delle superfici della struttura).

BIBLIOGRAFIA

C. Bonacina, A. Cavallini, L. Mattarolo. *Trasmissione del Calore*. CLEUP, Padova, 1992

Y.A. Cengel. *Termodinamica e Trasmissione del Calore*. Mc Graw-Hill, 1998

M.N. Özisik. *Heat Conduction*. J. Wiley & Sons, Inc, Second Edition. 1993

A. Bejan. *Convective Heat Transfer*. MC Graw Hill

F. Incropera, D. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. J. Wiley & Sons, Inc, Third Edition. 1990