Applicazioni eq. energia meccanica

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0 \qquad (3.18)$$

Questa é l'equazione di Bernoulli generalizzata per deflusso stazionario monodimensionale, riferita alla massa $\dot{m}\cdot d\tau$ transitata nell'intervallo $d\tau$. Dividendo ambo i membri per $d\tau$ si ha la stessa equazione scritta in termini di potenza:

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}=0$$

dividendo per $\dot{m}$ si ha la stessa equazione scritta per unità di portata massica:

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}=0$$

Casi particolari notevoli sono:

1) deflusso senza lavoro utile

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+R_{12}=0$$

2) deflusso senza lavoro utile e senza attrito (equazione di Eulero)

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp=0$$

3) deflusso senza lavoro utile e senza attrito di un fluido incomprimibile

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+v\cdot(p_2-p_1)=0$$

in tal caso si ha la costanza lungo il condotto del trinomio di Bernoulli:

$$\frac{\omega^2}{2}+g\cdot z+v\cdot p=costante$$

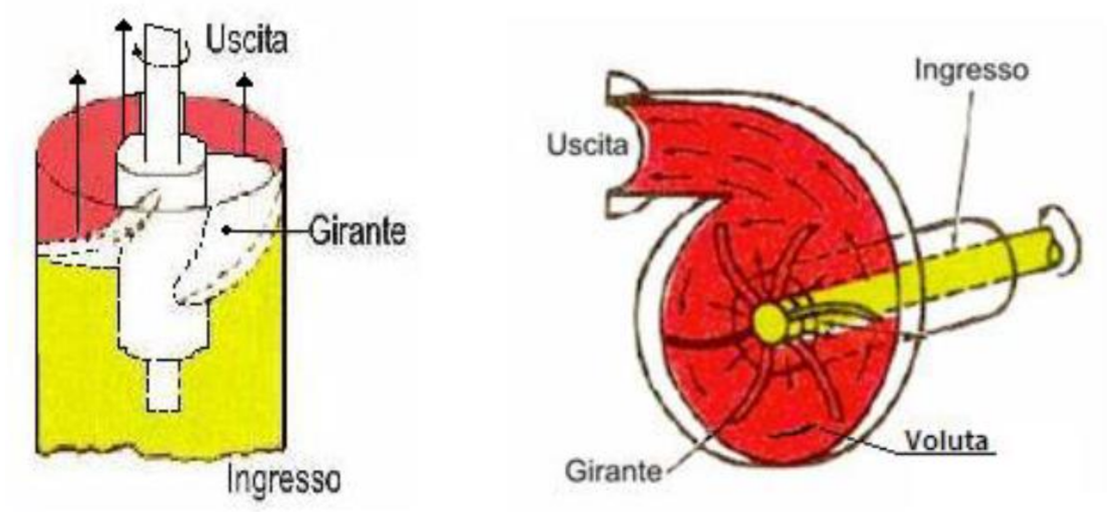
oppure:

$$\frac{\omega^2}{2}+g\cdot z+\frac{p}{\rho}=costante$$

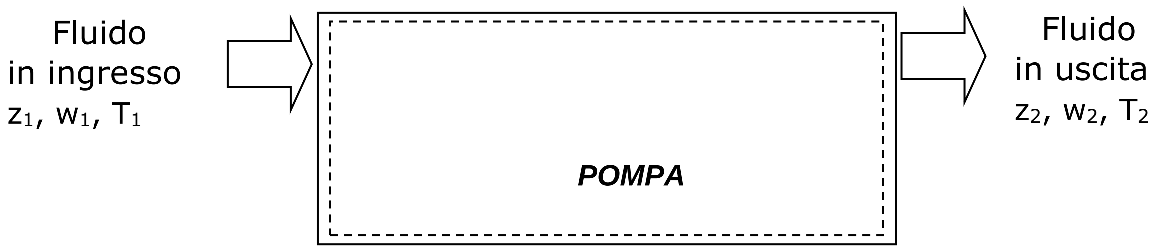
dove ρ è la densità del fluido.

Pompa in regime stazionario.

Il dispositivo utilizzato per la <u>movimentazione di un liquido</u> all'interno delle tubazioni viene chiamato pompa. Esso è in grado di fornire una sovrapressione che permette di vincere gli attriti lungo le tubazioni e di innalzare il liquido da una quota ad un'altra vincendo la gravità. Ci occupiamo qui del solo dispositivo pompa a sé stante con alcune ipotesi semplificative, ma del tutto accettabili:



Pompa assiale, a sinistra, e pompa centrifuga a destra.



Applichiamo ad essa l'eq. dell'energia meccanica.

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

Si può ipotizzare che:

$z_1 = z_2$ *ingresso e uscita della pompa sono allo stesso livello;* $(\Delta E_P = 0)$;

$w_1 = w_2$ *ingresso e uscita della pompa con diametro uguale;* $(\Delta E_C = 0)$;

$T_1 = T_2$ *la pompa non scambia calore con il fluido.*

Pertanto l'eq. dell'energia meccanica diventa:

$$\left[\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

In assenza di attriti ed in termini di potenza (nell'unità di tempo):

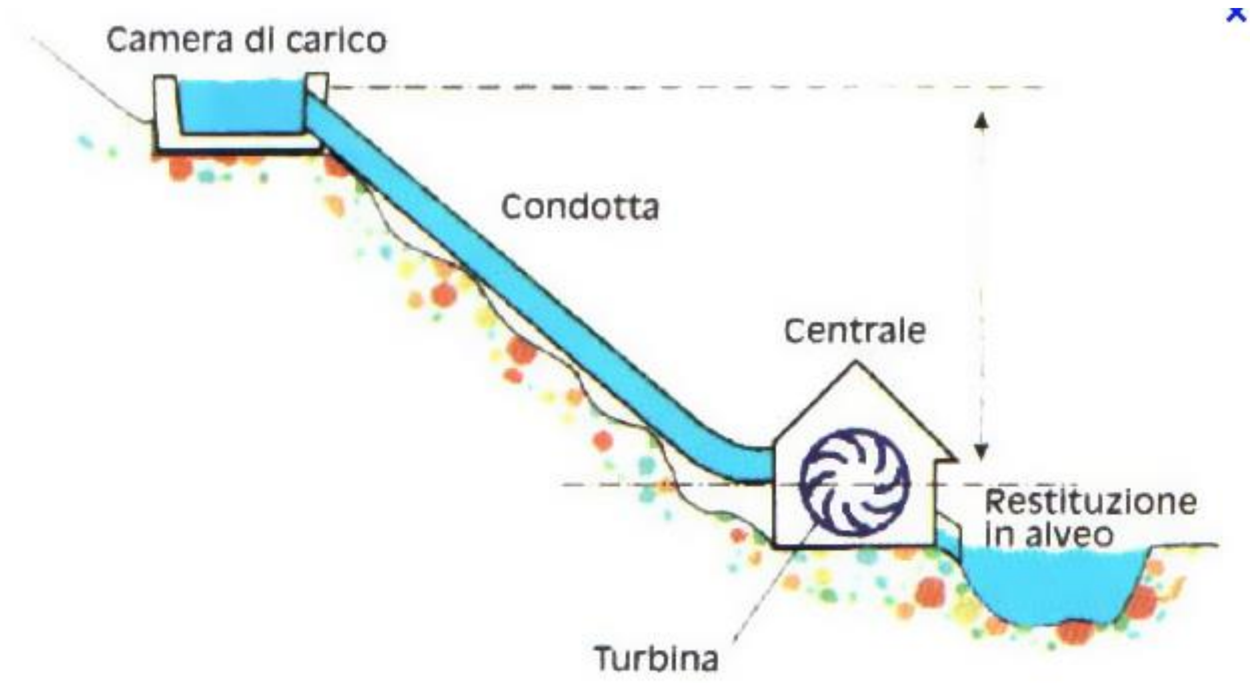
$$\left[\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}\right]\cdot\dot{m}=0 \qquad \rightarrow \qquad l'_{12}\cdot\dot{m}=\dot{L}'_{12}=-\dot{m}\cdot\left(\int_1^2 v\cdot dp\right)$$

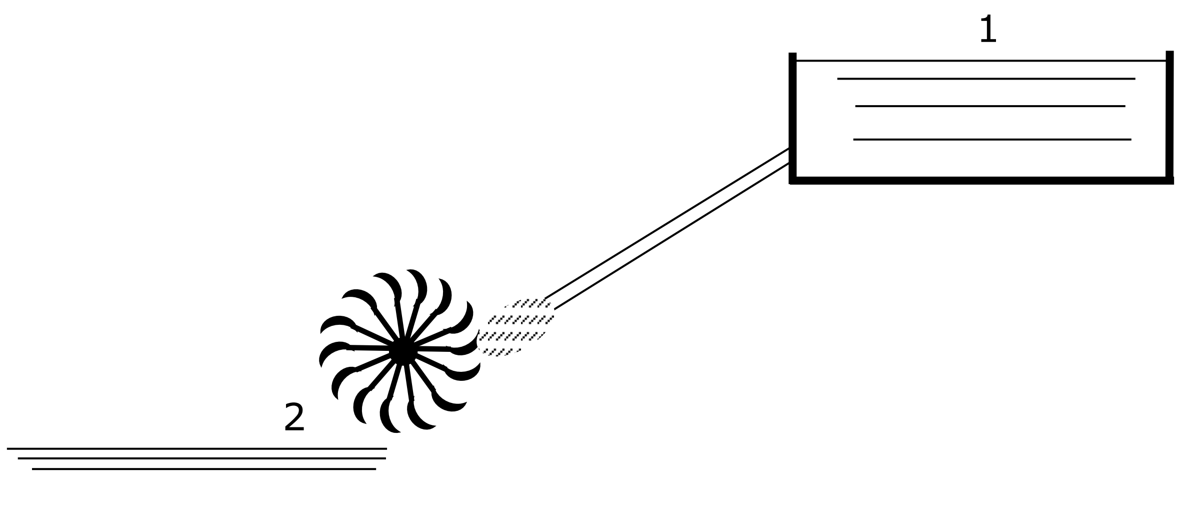
Se il fluido v (volume specifico) è costante (fluido incomprimibile):

$$\dot{L}'_{12} = -\dot{m} \cdot \left(\int_1^2 v \cdot dp \right) = -\dot{m} \cdot v \cdot (p_2 - p_1) = \dot{m} \cdot v \cdot (p_1 - p_2) = \dot{m} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right)$$

Turbina idraulica in regime stazionario

La turbina è una macchina in cui un asse, dotato di pale, viene mantenuto in movimento dall'azione dell'acqua (turbina idraulica) o del vapore (turbina a vapore) o del gas (turbina a gas). Le turbine idrauliche trovano il loro più importante utilizzo nelle centrali idroelettriche. Si ha un bacino idrico che attraverso una condotta (condotta forzata) scarica acqua sulla turbina. A seconda della differenza di quota tra il bacino e la turbina si parla di alta e bassa caduta. Esistono turbine ottimizzate per alte cadute – Pelton - e per basse cadute – Francis.





stabiliamo le sezioni di ingresso ed uscita del sistema aperto nel seguente modo:

Sezione 1 = pelo dell'acqua del bacino idrico
Sezione 2 = uscita dalle pale della turbina ed ingresso in un secondo bacino

Considerando una turbina ad alta caduta (Pelton) ed applichiamo ad essa l'eq. dell'energia meccanica. Si avrà:

$z_1 >> z_2 \quad w_1 \approx 0 \quad w_2 <> 0 \quad t_1 = t_2 \quad p_1 = p_2 \quad v = costante$

Applichiamo ad essa l'eq. dell'energia meccanica.

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

Ipotizzando l'assenza di attriti ($R_{12}=0$), ed in termini di potenza (divido per l'intervallo di tempo $d\tau$)

$$-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=l'_{12}\cdot\dot{m}\cdot d\tau$$

$$\dot{L}'_{12}=l'_{12}\cdot\dot{m}=-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp\right]\cdot\dot{m}$$

Si assume che $w_1 \approx 0 \quad w_2 <> 0$ e $p_1 = p_2$, perché nella sezione di uscita il fluido è alla stessa pressione della sezione di entrata, ovvero, se non vi sono grandi dislivelli, alla pressione esercitata dall'atmosfera sul pelo dell'acqua del bacino idrico (ha esaurito la sovrapressione nel muovere la girante), allora:

$$\dot{L}'_{12}=-\left[\frac{\omega_2^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)\right]\cdot\dot{m}=\left[g\cdot(z_1-z_2)-\frac{\omega_2^2}{2}\right]\cdot\dot{m}$$

Analisi dimensionale:

$$W=\left[\frac{m}{s^2}\cdot m-\frac{m^2}{s^2}\right]\cdot\frac{kg}{s}$$

$$W=\frac{kg}{s}\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m=\frac{N}{s}\cdot m=\frac{J}{s}$$

NB. In queste valutazioni è determinante la delimitazione del sistema.

Poiché $z_1 >> z_2$, risulta $\dot{L}>0$, quindi il lavoro meccanico fornito dal sistema si ottiene a spese del salto di quota che subisce il fluido. La velocità residua all'uscita della girante deve essere ridotta al valore più basso compatibile con il corretto deflusso del fluido dalla macchina.

Se poniamo la sezione di uscita del sistema aperto prima della macchina ed applichiamo il PPSA, nella forma di Bernoulli, vediamo che tutta l'energia potenziale dell'acqua nel bacino si trasforma in energia cinetica all'uscita del condotto di adduzione dell'acqua alla turbina: la velocità di uscita del liquido dal condotto risulta: $w_2=\sqrt{2 \cdot g \cdot (z_2 - z_1)}$.

Considerando invece una turbina a caduta bassa Francis o Kaplan si avrà:

$z_1>z_2$ $\quad w_1 \approx 0$ $\quad t_1 = t_2$ $\quad p_1> p_2$ $\quad$ v=costante

Sezione 1 = pelo dell'acqua del bacino idrico
Sezione 2 = uscita dalle pale della turbina oppure dal tubo di scarico

Stavolta, non considerando 2 nel secondo bacino (dove p2 = p1 = p atm), non è trascurabile la differenza di pressione rispetto a 1,

Ipotizzando l'assenza di attriti (R_{12}=0), ed in termini di potenza (divido per l'intervallo di tempo dτ)

$$-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau = l'_{12}\cdot\dot{m}\cdot d\tau$$

$$\dot{L}'_{12}=l'_{12}\cdot\dot{m}=-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp\right]\cdot\dot{m}$$

Ipotizzando sempre che *$w_1 \approx 0$ e v=costante*:

$$\dot{L}'_{12}=-\left[\frac{\omega_2^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+v\cdot(p_2-p_1)\right]\cdot\dot{m}=\left[g\cdot(z_1-z_2)-\frac{\omega_2^2}{2}-\frac{p_2-p_1}{\rho}\right]\cdot\dot{m}$$

Il salto (z_1 - z_2) può ridursi fino ad alcuni metri, quindi la potenza sviluppata è grande se la portata è elevata.

La potenza cresce rapidamente se vengono ridotte la velocità e la pressione all'uscita della girante (di segno negativo nell'espressione del lavoro utile). Il secondo obiettivo si ottiene aggiungendo all'uscita della turbina un apposito tubo di scarico, a tenuta ermetica, di forma tronco-conica che termina sotto il pelo dell'acqua, detto *aspiratore*. La sua funzione è duplice:

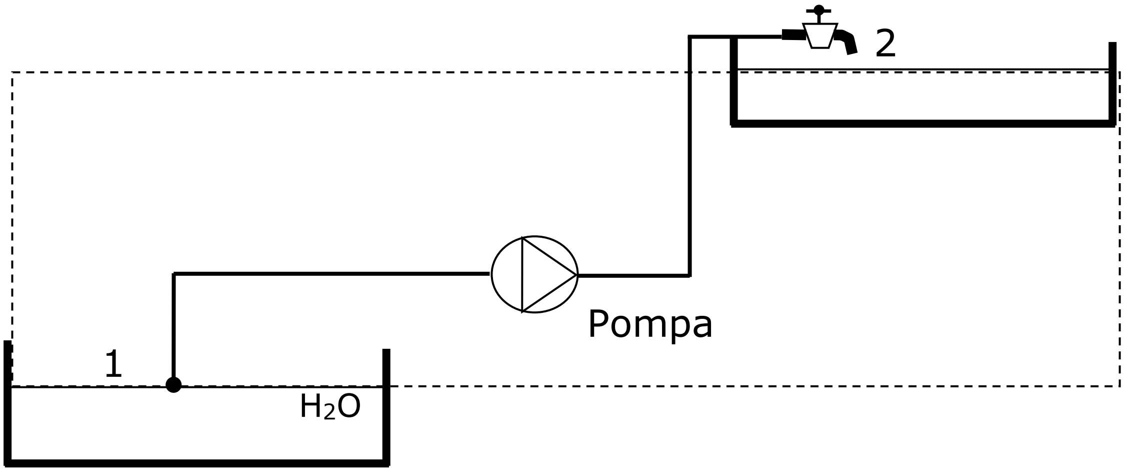
- utilizza la caduta da girante a bacino per creare una pressione a valle della girante inferiore a quella atmosferica, che si avrebbe in assenza dell'aspiratore; le relazioni precedenti mostrano che lungo un tubo verticale a sezione costante la pressione cresce, poiché la pressione atmosferica si trova alla fine del tubo ne consegue che all'inizio la pressione è inferiore a quella atmosferica.

- riduce la velocità del fluido nello scarico (avendo una sezione crescente verso il basso) e in base alle relazioni precedenti l'energia cinetica recuperata dall'aspiratore si trasforma in una ulteriore depressione sullo scarico della turbina.

Quindi il lavoro meccanico fornito dal sistema è dovuto in parte al salto di quota che subisce il fluido ed in parte al salto di pressione creato dall'aspiratore.

È interessante notare che, se invece considero la sez. di ingresso immediatamente prima della turbina e la sez. di uscita immediatamente dopo di essa, allora $z_1=z_2$, $p_1=p_{atm}$ più la pressione dovuta alla forza peso della colonna d'acqua applicata sulla sezione di ingresso, $p_2 = p_{atm}$ (come nel secondo bacino), a fare il lavoro è la differenza di pressione.

Sollevamento di liquidi mediante pompa.



Due serbatoi d'acqua sono collegati da un condotto.

Considerando il sistema chiuso, le uniche superfici a contatto con l'esterno sono quella di entrata (1) e quella di uscita (2) ovvero le superfici del liquido nei due bacini: ad esse si fa riferimento nell'applicazione dell'equazione dell'energia meccanica.

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

Che, essendo v = costante e trascurando R_{12}, diventa:

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}+l'_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=-l'_{12}\cdot\dot{m}\cdot d\tau$$

In termini di potenza (divido per l'intervallo di tempo):

$$\dot{L}'_{12}=l'_{12}\cdot\dot{m}=-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp\right]\cdot\dot{m}$$

$$
con \begin{cases} w_2 \cong 0 & \textit{(sezione del condotto pari al quella del sebatoio)} \\ w_1 \cong 0 & \textit{(sezione del condotto pari al quella del sebatoio)} \\ \dot{L} \neq 0 & \textit{(potenza meccanica ceduta dalla pompa al fluido)} \\ z_2 - z_1 = 33\,m & \textit{(dislivello tra i serbatoi)} \\ p_2 = p_1 & \textit{(pressione atmosferica)} \\ \dot{m} = \Delta m / \Delta \tau = \rho \cdot \dot{V} & \textit{(portata di massa)} \end{cases}
$$

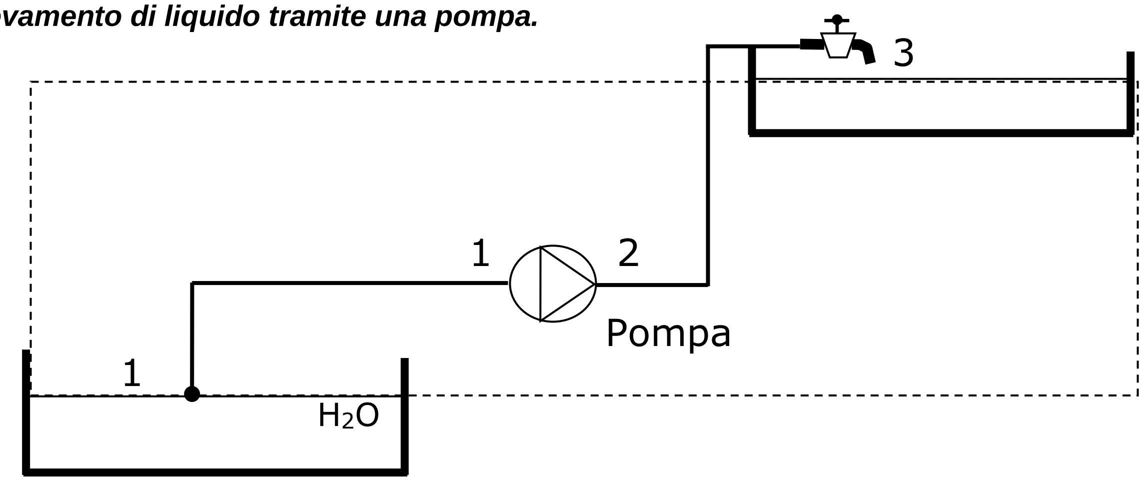
Si riduce a:

$$
\dot{L}_{12} = [0 + g \cdot (z_2 - z_1) + 0] \cdot \dot{m} = [9{,}81 \cdot 33] \cdot 10/60 = 53.95\,kW \quad [W]
$$

$$
\left[\frac{m}{s^2} \cdot m \cdot \frac{kg}{s} \right] = \left[\frac{kg}{s} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \right] = \left[\frac{N}{s} \cdot m \right] = \left[\frac{J}{s} \right] = W
$$

Se la portata $\dot{m}$ è pari a 10 l/min=10/60 kg/s

Sollevamento di liquido tramite una pompa.



Si può delimitare diversamente il sistema limitandolo ad ingresso ed uscita dalla pompa.

Nel punto 1 (prima della pompa) il livello è z_1=0 e la pressione è quella atmosferica p_1=1atm.
Nel punto 2 (dopo la pompa) il livello è z_2= z_1, la velocità è w_2= w_1e la pressione p_2 è dovuta all'effetto della colonna d'acqua alta z_3 -z_1 = 33 metri (3 atm) più la pressione atmosferica p_3 agente su tale colonna.
Nel punto 3 (uscita rubinetto) il livello è z_3=33m e la pressione è quella atmosferica p_3=1atm.
La portata $\dot{m}$ è pari a 10 l/min=10/60 kg/s e la differenza di pressione tra uscita e ingresso della pompa è p_2-p_1=(3+1)-1=3 atm. Per l'acqua ρ=1000kg/m^3; 1atm=1kg/cm^2 =101325 Pa; pertanto la potenza ceduta al fluido dalla girante della pompa, vale:

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\int_1^2 v\cdot dp+l'_{12}+R_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

Che, essendo v = costante e trascurando R_{12}, diventa:

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}+l'_{12}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=0$$

$$\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}\right]\cdot\dot{m}\cdot d\tau=-l'_{12}\cdot\dot{m}\cdot d\tau$$

In termini di potenza (divido per l'intervallo di tempo):

$$\dot{L}'_{12}=l'_{12}\cdot\dot{m}=-\left[\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}+g\cdot(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}\right]\cdot\dot{m}$$

$$-\dot{L}_{12}=\dot{m}\cdot v\cdot(p_3-p_2)=\dot{m}\cdot\frac{(p_3-p_2)}{\rho}\ \rightarrow\ \dot{L}_{12}=\dot{m}\cdot\frac{(p_2-p_3)}{\rho}$$

$$\dot{L}_{12}=\dot{m}\cdot\frac{\Delta p}{\rho}=\frac{10}{60}\cdot\frac{3}{1000}\cdot 101325\ \cong 51\,[W]$$