2. L’ENERGIA MECCANICA

2.1 Il concetto di forza

La **forza** può essere definita come “azione reciproca tra corpi che ne altera lo stato di moto o li deforma: essa é caratterizzata da intensità direzione e verso”. Si tratta dunque di una grandezza vettoriale. Esempi di forza sono il peso, l’elasticità, il magnetismo, le azioni tra corpi elettricamente carichi.

2.2 Il concetto di energia

Quello dell’energia è probabilmente il concetto fisico più importante che si incontra nello studio di tutta la scienza. Una sua chiara comprensione e un’esatta valutazione della sua importanza non fu raggiunta che nel 1847, quando il fisico tedesco *Hermann Helmholtz* (1821-1894) enunciò la *legge generale dell’energia*.
Per definire il concetto di energia è possibile partire da quello di lavoro, salvo poi definire che cosa si intenda per lavoro.

Nel linguaggio scientifico la parola **lavoro** ha un significato più ristretto di quello che ha nel linguaggio comune. Per esempio per sollevare un oggetto per alcuni metri è necessario esercitare una forza tanto intensa da vincere la forza gravitazionale diretta verso il basso compiendo un certo lavoro, oppure, se si spinge una cassa su una superficie ruvida con una forza tale da vincere l’attrito e da spostarla di un certa distanza, si esegue anche in questo caso una certa quantità di lavoro. Su ciò tutti sono d’accordo. Un uomo fermo che tenga in mano una pesante valigia fa una grande fatica, ma, fisicamente parlando, non compie un lavoro meccanico. Se non c’è movimento non c’è lavoro.

Possiamo, come primo tentativo, definire il **lavoro** come il prodotto dell’intensità di una forza lungo la direzione dello spostamento per lo spostamento stesso:

$$Lavoro = forza \cdot spostamento \qquad (2.1)$$

Per andare un po’ più a fondo riprendiamo il caso dell’oggetto sollevato dalla superficie terrestre. Consideriamo sia la forza che lo spostamento come vettori (caratterizzati da un modulo, una direzione ed un verso ben precisi): per tale motivo saranno indicati in seguito in grassetto. Dato che è la forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$ a trattenere sulla superficie terrestre i corpi, per sollevarli si deve applicare una forza eguale e di verso contrario alla forza di gravità. Ora la forza di gravità dipende dalla massa m del corpo e dall’accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$ ($g = 9{,}81\ m/s^2$) secondo quanto enunciato dalla **seconda legge della dinamica** (seconda legge di Newton) $\boldsymbol{F}_g = m \cdot \boldsymbol{g}$. Se la massa del corpo è espressa in kilogrammi la forza risulta espressa in $kg \cdot m/s^2$ ovvero nell’unità di misura derivata detta **newton**.
Se si solleva l’oggetto in verticale per una differenza di quota d, espressa in metri, il lavoro che ne risulta è $L = m \cdot g \cdot d$ [$kg \cdot m^2/s^2$]. L’unità di misura derivata che corrisponde a questa relazione, e che si esprime nelle unità di misura $kg \cdot m^2/s^2$, è detta **joule** in onore di *James*

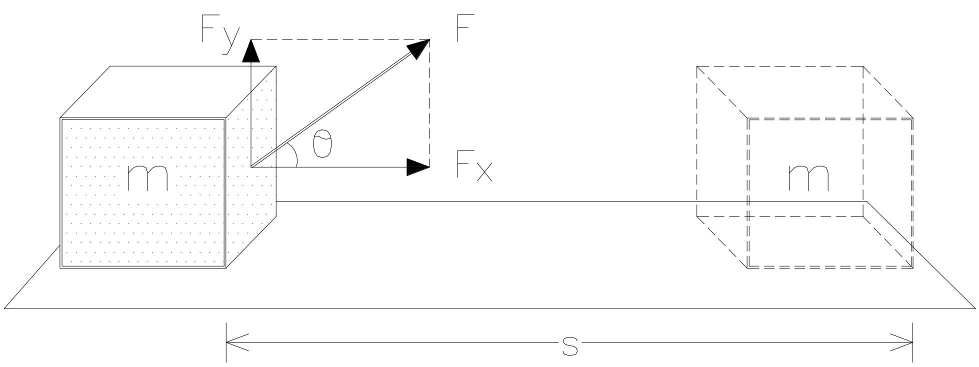
Prescott Joule (1818-1889), il fisico inglese i cui studi chiarirono i concetti di lavoro e energia.

Nell'esempio considerato ci si è limitati al caso in cui l'oggetto venga sollevato (cioè spostato verticalmente) operando contro la forza di gravità. In questo caso la forza applicata (che ha modulo e direzione uguali alla forza di gravità e verso contrario) ha la *medesima direzione dello spostamento* e la relazione (2.1) ha un chiaro significato. E' possibile però applicare agli oggetti anche forze aventi direzione diversa da quella in cui avviene lo spostamento. Per esempio spingendo un'auto si rileva immediatamente come varia lo sforzo secondo l'angolo che si assume con il corpo e con le braccia, nessuno riuscirebbe a spingere un'auto assumendo la tessa postura corporea (praticamente eretta) che utilizzerebbe per spingere una carrozzina per neonati o il carrello del supermercato.
La parte di una forza che compie lavoro mediante uno spostamento è la sua componente lungo la direzione dello spostamento.
Consideriamo il corpo di massa *m* della figura seguente: la forza ***F*** viene applicata al suo baricentro per trascinarlo lungo un piano facendogli compiere uno spostamento ***s***. La direzione della forza forma con la direzione del moto un angolo θ. La forza può essere considerata come la somma vettoriale di due forze indipendenti le componenti $\boldsymbol{F_x}$ e $\boldsymbol{F_Y}$, orientate rispettivamente nella direzione del moto ed in direzione perpendicolare a questa.

$$F_x = F \cdot \cos\theta \qquad F_y = F \cdot \sin\theta \qquad (2.2)$$

La componente F_x è diretta lungo la direzione dello spostamento perciò è la sola a compiere un lavoro, il quale sarà pari a:

$$L = F_x \cdot s = F \cdot \cos\theta \cdot s \qquad (2.3)$$



Ricordando il significato di **prodotto scalare** di due vettori possiamo scrivere in termini più generali (in grassetto i vettori):

$$L = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} \qquad (2.4)$$

Che ribadisce ancora una volta come il lavoro compiuto da una forza che provoca uno

spostamento si ottenga considerando la proiezione del vettore rappresentante la forza nella direzione del moto.
Una caratteristica importante del lavoro compiuto da una forza è la rapidità con cui esso è stato eseguito, questo concetto viene espresso in termini fisici dalla grandezza fisica che va sotto il nome di **potenza**. Se durante un intervallo di tempo $\Delta\tau$ è eseguito il lavoro L, la potenza media impiegata è:

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta\tau} \qquad (2.5)$$

passando a considerare intervalli di tempo infinitesimi è possibile definire la potenza istantanea come:

$$P = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta\tau} = \frac{dL}{d\tau} \qquad (2.6)$$

L'unità di misura corrispondente avrà le dimensioni di un lavoro diviso un tempo e quindi, utilizzando le rispettive unità nel SI, J/s. Essa prende il nome di **watt** (simbolo W) in onore di *James Watt* (1736 - 1819), l'ingegnere scozzese le cui ricerche permisero che il motore a vapore divenisse di uso pratico.
Definito in questo modo il lavoro possiamo definire l'**energia** come la possibilità di compiere un lavoro: prima abbiamo energia, poi avremo del lavoro svolto.

La quantità di energia usata durante una certa operazione o un certo processo può essere espressa sotto forma del prodotto della potenza per il tempo. Per esempio la quantità di energia assorbita da un motore elettrico della potenza di un 1 kW che funziona per un'ora è di 1 kWh (kilowattora), o: 1˙000 W·3˙600 s = 3˙600˙000 J = 3,6 MJ, la quantità di energia generata da una centrale elettrica di 1˙000 MW in un'ora di funzionamento è di 1˙000 MWh (Megawattora), o: 1˙000˙000˙000 W·3˙600 s = 3˙600˙000˙000˙000 J = 3˙600 GJ = 3,6 TJ.

Nei prossimi paragrafi prenderemo in considerazione alcune forme di energia molto importanti.

2.3 Energia cinetica

Si consideri ora una forza *F* che agisca su una massa *m* in moto, facendone variare la velocità *v con* un'accelerazione *a*. Se tale forza ha la stessa direzione del moto si può scrivere:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{d\tau} \qquad (2.7)$$

ed il lavoro svolto da tale forza lungo lo spostamento elementare *ds* vale:

$$dL = F \cdot ds = m \cdot \frac{dv}{d\tau} \cdot ds = m \cdot dv \cdot \frac{ds}{d\tau} \qquad (2.8)$$

Poiché per definizione $ds/d\tau$ corrisponde alla velocità istantanea *v* del corpo può scrivere anche:

$$dL = m \cdot v \cdot dv \qquad (2.9)$$

pertanto il lavoro svolto dalla forza lungo lo spostamento finito dal punto A al punto B è:

$$L = \int_A^B m \cdot v \cdot dv = m \cdot \int_A^B v \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_B^{\ 2} - v_A^{\ 2}\right) \qquad (2.10)$$

Da questa equazione si osserva che il lavoro compiuto dipende unicamente dai valori assunti dalla velocità all'inizio e alla fine della traiettoria o più precisamente dal valore che nel punto di inizio e fine della traiettoria assume il prodotto: $m \cdot v^2 / 2$.

Essendo stato eseguito sul corpo un lavoro esso ha acquistato una quantità di energia pari a tale lavoro. Questa energia che un corpo possiede in virtù del suo moto è detta *energia cinetica* E_k e può essere espressa dalla relazione:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad (2.11)$$

Esempio 1. Una vettura della massa complessiva di 0,750 t, procedendo ad una velocità di 80 km/h (22,2 m/s), si scontra frontalmente con un autocarro della massa complessiva di 20 t che procede in senso contrario alla velocità di 120 km/h (33,3 m/s). L'urto è centrato e semiplastico. La deformazione delle parti anteriori dei due veicoli assorbe il 20% della loro energia cinetica.
Calcoliamo innanzitutto a che velocità procede dopo l'impatto la massa complessiva dei due veicoli. Le rispettive energie cinetiche prima dell'impatto sono le seguenti:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot \left(\frac{80}{3,6}\right)^2 = 185185[J] = 185[kJ] = 0,185[MJ]$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 20000 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right)^2 = 1111110[J] = 1,111[MJ]$$

penalizzando entrambi i valori del 20% otteniamo: E_{k1}=148˙148 [J] e E_{k2}=888˙888 [J], dal momento che le velocità hanno verso opposto sottraiamo E_{k1} a E_{k2} ottenendo l'energia cinetica totale delle due masse dopo lo scontro E_{ktot}=740˙740 [J] = 0,74 [MJ].

Dopo l'urto la massa totale in movimento sarà comunque la somma delle masse dei due veicoli (20750 kg), dotata dell'energia cinetica sopra calcolata. Possiamo quindi ricavare la velocità di questa massa totale (autocarro+auto):

$$E_{ktot} = \frac{1}{2} \cdot 20750 \cdot v^2 = 740740[J] = 0,74[MJ]$$

$$v = \sqrt{\frac{740740}{\frac{1}{2} \cdot 20750}} = 4{,}22[m/s] \cong 15{,}2[km/h]$$

Vogliamo ora sapere a quale velocità dovrebbe andare la vettura per fermare il camion, per far in modo cioè che la somma algebrica delle due energie cinetiche sia nulla. Prescindendo dall'energia assorbita dal lavoro di deformazione dei veicoli, la vettura dovrà possedere la stessa energia cinetica del camion ovvero:

$$E_{k1} = E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot v^2 = 1111110[J]$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1111110}{750}} = 54{,}43[m/s] \cong 195[km/h]$$

Nel primo caso si è visto che la variazione di velocità subita dagli occupanti del camion è di circa 105 km/h (29,16 m/s), ipotizzando che l'urto duri un decimo di secondo l'accelerazione subita sarebbe di 291,6 m/s^2 (29,72 g), mentre per gli occupanti della vettura, tenendo conto del cambiamento di segno della velocità, la variazione di velocità è di 22,22-(-15,2)=37,42 m/s, dunque l'accelerazione è di 374,2 m/s^2 ovvero 38,14 g. Nel caso in cui la vettura riesce a fermare il camion l'accelerazione per i suoi occupanti è di 544,3 m/s^2 ovvero 55,48 g.
Ma verosimilmente un urto del genere dura molto meno di un decimo di secondo pertanto i valori dell'accelerazione sono molto maggiori. Si tratta comunque di valori letali per soggetti umani, si pensi che l'accelerazione cui è sottoposto un pilota di formula 1 può essere di 3 g, mentre un'accelerazione di 9 g è sicuramente letale per un normale soggetto umano (normotipo adulto) non protetto (da air-bag, da apposita tuta "anti-g" o da altri dispositivi).

Esempio 2. Una vettura, della massa complessiva di 1,2 t, procede ad una velocità di 50 km/h (13,88 m/s), un individuo posto al centro della carreggiata spara una serie di colpi di pistola verso la vettura utilizzando una colt 44 magnum. Ipotizzando che la parte anteriore della vettura sia blindata e che la stessa proceda a motore spento dopo il primo impatto (in modo cioè che non vi siano altre forze applicate), vogliamo calcolare con quanti colpi è possibile fermare la vettura.

L'energia cinetica del veicolo nelle condizioni descritte è di:

$$E_{k\_auto} = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot (13{,}88)^2 = 115741[J]$$

il proiettile dell'arma indicata ha una massa di 15,6 g e viaggia ad una velocità di 1635 km/h (454,32 m/s), pertanto la sua energia cinetica è:

$$E_{k\_proiettile} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0156 \cdot \left(\frac{1635}{3{,}6}\right)^2 = 1610[J]$$

sarebbero pertanto necessari $\frac{115741}{1610} \cong 72$ colpi per fermare l'auto, più di quanti ne contenga un caricatore. I sei colpi disponibili nell'arma utilizzata ridurrebbero l'energia cinetica dell'auto a:

$$E_{K\_auto\_b} = 115741 - 6 \cdot 1610 = 106081 [J]$$

dunque la sua velocità a:

$$v = \sqrt{\frac{106081}{\frac{1}{2} \cdot 1200}} = 13{,}29 [m/s] = 47{,}86 [km/h]$$

è pertanto opportuno che l'individuo armato si sposti dalla traiettoria dell'auto dopo aver sparato.

Ipotizziamo ora che l'individuo armato impieghi un AK47, le cui pallottole hanno una massa di 7,95 g e viaggiano a 2633,25 km/h (720 m/s, ovvero oltre Mach 2). L'energia cinetica di ogni pallottola sarà pari a:

$$E_{k\_proiettile} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}00795 \cdot \left(\frac{2633{,}25}{3{,}6}\right)^2 = 2100 [J]$$

in tal caso basterebbero $\frac{115741}{2100} \cong 55$ colpi. Ma un caricatore purtroppo ne contiene 30.

Impiegandoli tutti l'energia cinetica del veicolo verrebbe ridotta a 115741-30·2100=52741 [J] e la sua velocità ridotta a:

$$v = \sqrt{\frac{52741}{\frac{1}{2} \cdot 1200}} = 9{,}37 [m/s] = 33{,}75 [km/h]$$

[NB. Le informazioni sulle armi sono tratte dal "Manuale tecnico del vetro" della Saint Gobain Fabbrica Pisana s.p.a.]

2.4 Energia di posizione o energia potenziale gravitazionale

Esaminiamo ora l'energia associata all'attrazione gravitazionale agente fra la terra e altri oggetti in prossimità della sua superficie. Consideriamo il sistema formato dalla terra e da un oggetto fisico di massa *m* e supponiamo ora di sollevare tale oggetto, inizialmente in quiete, fino a una posizione situata ad una certa altezza *h* al di sopra della posizione iniziale e di lasciare l'oggetto di nuovo fermo. E' chiaro che alla fine dell'operazione è stato eseguito del lavoro contro la forza di gravità ($m \cdot g$), ma non è avvenuta una variazione di velocità dell'oggetto, perciò esso non ha immagazzinato energia cinetica. L'oggetto però possiede un corredo energetico in virtù della sua posizione, una forma di energia immagazzinata che può essere ceduta, come è facile accertare lasciandolo cadere fino alla sua posizione iniziale.

Dato che, in questo caso, l'accelerazione è uguale a: $a = g = \dfrac{dv}{d\tau}$

l'intervallo temporale infinitesimo può essere così espresso: $d\tau = \dfrac{dv}{g}$, mentre la velocità istantanea in un istante generico durante la caduta dall'altezza h è: $v = \dfrac{dh}{d\tau}$.

Da quest'ultima espressione si ricava la variazione di quota infinitesima durante l'intervallo temporale infinitesimo che contiene quell'istante generico:

$$dh = v \cdot d\tau = v \cdot \frac{dv}{g}$$

integrando fra istante iniziale e istante finale si ottiene la variazione di quota totale:

$$h = \int dh = \int v \cdot \frac{dv}{g} = \frac{1}{g} \int v \cdot dv = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2$$

dove v è la velocità finale (quella iniziale è uguale a zero), il cui valore sarà:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \text{ -------> } v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Pertanto, alla fine della caduta dall'altezza h, l'oggetto avrà acquistato quella velocità, e la sua energia cinetica sarà:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot g \cdot h) = m \cdot g \cdot h$$

L'oggetto prima di cadere possiede quindi una quantità di energia potenziale o di posizione $m \cdot g \cdot h$ che ha la possibilità di trasformarsi, cadendo, in energia cinetica.

Il lavoro eseguito contro la forza di gravità ($m \cdot g$) per sollevare un oggetto è in esso immagazzinato sotto forma di energia. Questa energia che il corpo possiede in virtù della sua posizione è chiamata appunto energia di posizione o energia potenziale del corpo E_p e può essere espressa dalla relazione:

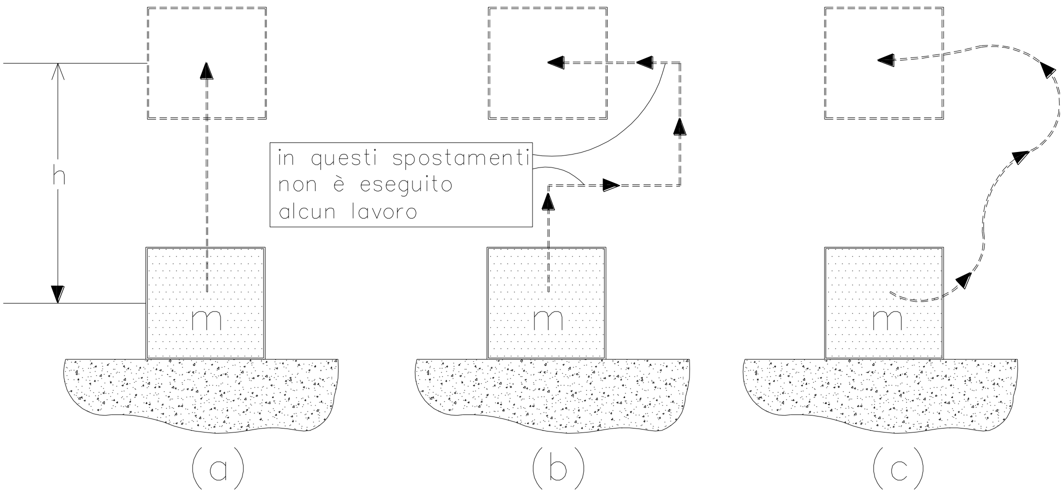
$$E_p = m \cdot g \cdot h \qquad (2.12)$$

in cui h è l'altezza della posizione del corpo rispetto ad una quota fissata come riferimento, scelta in maniera arbitraria. Come si vede si tratta sempre di una forza ($m \cdot g$) per uno spostamento (h), questa volta in direzione verticale.

2.5 Forze conservative

E' importante a questo punto notare come, essendo la forza gravitazionale diretta sempre verticalmente verso il basso, non occorre (in assenza di attrito) alcuna forza, e quindi lavoro,

per spostare un oggetto in direzione orizzontale con velocità costante.
Ne consegue che, in assenza di attriti, se si scelgono due percorsi differenti per sollevare un oggetto all'altezza *h* come in figura, la quantità di lavoro è la sempre la stessa cioè $m \cdot g \cdot h$.
Ogni spostamento arbitrario può essere scomposto in due componenti: una orizzontale e una verticale, solo il moto verticale richiede che si esegua lavoro contro la forza di gravità, il moto orizzontale non richiede alcun lavoro contro di essa.
Perciò il moto di un oggetto da una posizione ad un'altra contro la *forza di gravità,* che è *costante in modulo e direzione* in ogni punto dello spazio considerato, richiede la stessa quantità di lavoro qualunque sia il percorso seguito. Si vede allora, in altre parole, che il *lavoro compiuto da tale forza dipende unicamente dalle posizioni iniziali e finali* che caratterizzano lo spostamento.



Da notare che se il corpo viene spostato lungo una traiettoria chiusa su se stessa (ovvero *se la posizione iniziale e finale che descrivono lo spostamento coincidono*) il lavoro compiuto dalla forza è nullo.

Una forza che sia caratterizzata dalla proprietà secondo cui la quantità di lavoro eseguito contro di essa dipende solo dalle posizioni iniziale e finale dell'oggetto spostato è detta *forza conservativa*. La forza gravitazionale che esiste in prossimità della superficie terrestre è manifestamente una forza conservativa

2.6 Conservazione dell'energia meccanica

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono dunque due forme in cui si può presentare l'energia di un corpo. Durante il moto del corpo queste due forme di energia, in generale, variano da istante a istante: l'energia cinetica E_k varia se varia la velocità del corpo, l'energia potenziale E_p varia se varia la posizione del corpo. Esiste però una legge fondamentale della fisica, detta **legge di conservazione dell'energia meccanica**, la quale stabilisce che se le forze che agiscono sul corpo considerato sono tutte conservative, la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si mantiene costante durante il moto, cioè:

$$E_k + E_p = E = costante \tag{2.13}$$

La costante E ha il nome di **energia meccanica** del corpo. Questa legge ha una validità generale a condizione che sul corpo non agiscano **forze non conservative** ovvero **forze dissipative**, come l'attrito e la resistenza del mezzo in cui il corpo si muove. Ci proponiamo ora di verificare questa legge in un caso particolare: il moto di caduta di un corpo.

Si consideri un corpo di massa m sottoposto alla forza gravitazionale (*forza conservativa*) che si trovi nella posizione iniziale A individuata dalla quota h_A rispetto ad un piano di riferimento. Si consideri che inizialmente il corpo sia fermo in tale posizione. Come è stato già detto se si lascia cadere liberamente il corpo si osserverà che esso ridurrà via via la sua quota ed aumenterà via via la sua velocità. Mentre cade liberamente il corpo è sottoposto ad una forza $F = m \cdot g$ che gli imprime un *moto uniformemente accelerato* per il quale, dopo un certo tempo $\Delta\tau$, la velocità sarà variata di $\Delta v = g \cdot \Delta\tau$. La velocità iniziale era nulla e nel tempo $\Delta\tau$ il corpo avrà percorso lo spostamento $\Delta h = h_A - h_B$.

Essendo l'accelerazione pari all'accelerazione di gravità:

$a = g = \dfrac{dv}{d\tau}$ → la variazione infinitesima di velocità sarà: $dv = g \cdot d\tau$

integrando tra gli istanti iniziale e finale si ottiene la velocità finale v:

$$v = \int dv = g \int d\tau \quad \rightarrow \quad v = g \cdot \tau$$

come si era visto la velocità istantanea in un istante generico è anche uguale a:

$v = \dfrac{dh}{d\tau}$ → per cui la variazione infinitesima di quota sarà: $dh = v \cdot d\tau = g \cdot \tau \cdot d\tau$

integrando tra gli istanti iniziale e finale si ottiene la variazione di quota totale:

$$\Delta h = g \cdot \int \tau \cdot d\tau = g \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2$$

in termini definiti:

$$\Delta h = g \cdot \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau \cdot d\tau = g \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \tau_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \tau_1^2 \right] = g \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\tau_2^2 - \tau_1^2 \right)$$

pertanto:

$$\Delta h = g \cdot \frac{\left(\tau_2^2 - \tau_1^2 \right)}{2} \tag{2.14}$$

Il lavoro prodotto dalla forza F durante lo spostamento Δh è allora pari a:

$$L = F \cdot \Delta h = m \cdot g^2 \cdot \frac{\left(\tau_2^2 - \tau_1^2 \right)}{2} \tag{2.15}$$

Il che (essendo v = a·τ = g·τ) equivale a scrivere:

$$L = m \cdot \frac{\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} \qquad (2.16)$$

Si riconosce pertanto che tale lavoro corrisponde alla variazione di energia cinetica ΔE_k che il corpo ha conseguito tra l'inizio e la fine dello spostamento *d*.

D'altra parte la sua energia di posizione, che inizialmente era $m \cdot g \cdot h_A$, dopo lo spostamento Δh si sarà contemporaneamente ridotta della quantità:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \qquad (2.17)$$

Sostituendo il valore di Δh espresso in precedenza (2.14) si ottiene allora:

$$\Delta E_p = m \cdot g^2 \cdot \frac{\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right)}{2} = m \cdot \frac{\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} = \Delta E_k \qquad (2.18)$$

Si vede, pertanto, che in un campo conservativo la diminuzione dell'energia di posizione equivale ad un aumento dell'energia cinetica del corpo.
Se pertanto si chiama *energia meccanica* la somma di queste due forme di energia si può affermare che **in un campo conservativo l'energia meccanica si conserva**.
In altre parole in un campo conservativo l'energia meccanica di un corpo permane invariata sebbene si possa liberamente trasformare dall'una all'altra delle suddette forme, cioè da energia cinetica in energia di posizione e viceversa.

Esempio 1. Una massa di 3 kg (vaso da fiori) cade dall'altezza di 10 m (finestra del quarto piano fuori terra di un edificio abitativo), a quale velocità la massa arriva a quota zero (marciapiede)?

La velocità finale dopo la variazione di quota *h* si può trovare facilmente con la relazione:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10} = 14[m/s] = 50{,}4[km/h]$$

oppure la si può ricavare dall'espressione dell'energia cinetica finale che sarà pari all'energia di posizione iniziale:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 3 \cdot 9{,}81 \cdot 10 = E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}5 \cdot 3 \cdot v^2 = 294{,}3[J]$$

$$v^2 = \frac{294{,}3}{0{,}5 \cdot 3}[m^2/s^2]$$

$$v = 14[m/s] = 50{,}42[km/h]$$

Dalla (2.14) si può ricavare la durata della caduta del vaso, ponendo l'istante iniziale τ_1 uguale a zero si ricava il valore dell'istante finale τ_2:

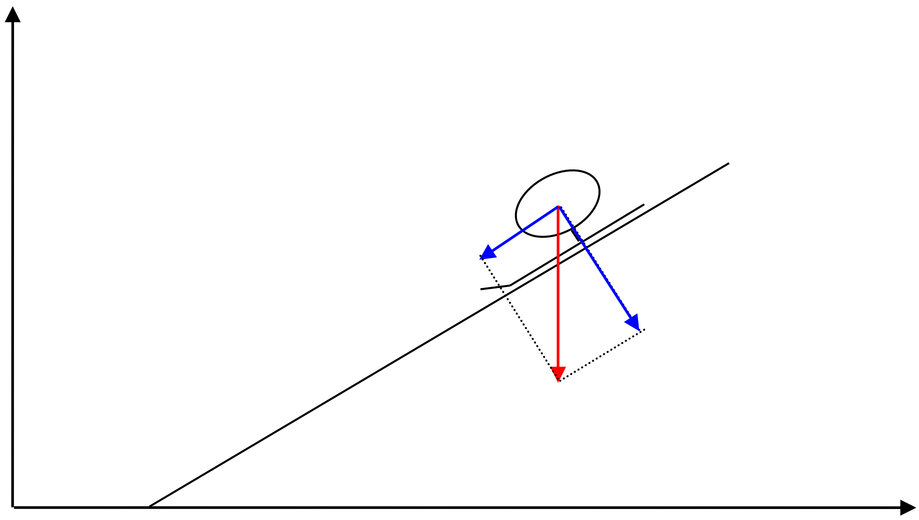
$$h = g \cdot \frac{\tau_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad \tau_2^2 = 2 \cdot \frac{h}{g} \quad \rightarrow \quad \tau_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{10}{9{,}81}} = 1{,}4278[s]$$

Oppure la si può ricavare dalla relazione che lega la velocità finale all'accelerazione, assumendo che la velocità iniziale sia nulla:

$$v_{fin} = g \cdot \tau_2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = g \cdot \tau_2 \quad \rightarrow \quad \tau_2^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{g^2} = \frac{2 \cdot h}{g} \quad \text{etc.}$$

Esempio 2. Uno sciatore della massa totale di 70 kg si lancia (assumendo la posizione "a uovo") su una pista inclinata di 35° (0,61 radianti) raggiungendo al termine di essa la velocità di 100 km/h. Si vuole calcolare da quale quota è partito lo sciatore assumendo come quota zero quella della fine della pista.

L'energia cinetica dello sciatore alla fine della pista, escludendo i fenomeni di attrito, sarà pari alla sua energia potenziale nel punto di partenza. A far muovere lo sciatore non è però l'intera accelerazione di gravità ma la sua componente in direzione parallela alla pista, pertanto:



$$E_p = m \cdot (g \cdot sin(0{,}61)) \cdot h = 70 \cdot (9{,}81 \cdot sin(0{,}61)) \cdot h = E_k$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}5 \cdot 70 \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\right)^2 = 27006[J]$$

$$h = \frac{0,5 \cdot 70 \cdot \left(\frac{100}{3,6}\right)^2}{70 \cdot (9,81 \cdot sin(0,61))} = 68,995$$

possiamo anche calcolare la distanza percorsa lungo la pista che sarà:

$$d = h / sin(0,61) = 68,995 / 0,57 = 122 [m]$$

2.7 Campi di forze conservativi

Una regione dello spazio in cui agisca un determinato sistema di forze viene detto *campo* di tali forze. In ogni punto di tale regione è definita la forza la cui intensità è funzione solo della posizione considerata. Quando la forza che lo caratterizza è conservativa il campo viene detto *conservativo* ed il lavoro per spostare un corpo al suo interno non dipende dal percorso effettuato ma solamente dalle posizioni iniziali e finali.
Tre esempi di campi di forza conservativi sono:

1) *il campo della forza peso*, cioè una regione dello spazio vicina alla superficie terrestre tale che l'accelerazione di gravità possa considerarsi costante in tutti i suoi punti: un corpo di massa m è soggetto alla forza $m \cdot g$;

2) *il campo della forza gravitazionale terrestre (o di ogni altro corpo celeste),* in ogni punto dello spazio intorno alla terra un corpo di massa m è soggetto ad una forza diretta verso il centro della terra di intensitá $G \cdot (m_T \cdot m)/r^2$ dove G è la costante di gravitazione universale, m_T è la massa della terra r^2 la distanza del corpo dal centro della terra;

3) *il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q:* una seconda carica q è soggetta ad una forza diretta verso la prima di intensitá proporzionale a $Q \cdot q/r^2$ (Legge di Coulomb) essendo r la distanza delle due cariche;

Analogamente a quanto visto per la forza gravitazionale in ogni campo conservativo è possibile definire una *energia potenziale* funzione della posizione dei corpi all'interno del campo.

Il *lavor*o effettuato dalle forze di un campo conservativo (o contro le forze di un campo conservativo) per ottenere lo spostamento di un corpo all'interno del campo stesso *sarà pari alla corrispondente variazione dell'energia potenziale o energia di posizione*.
All'interno di un campo conservativo l'**energia potenziale** è una **funzione delle coordinate spaziali** tale che la differenza tra i suoi valori iniziale e finale è uguale al lavoro compiuto su di un corpo per spostarlo dalla posizione iniziale alla posizione finale.

2.8 Statica dei fluidi e forze di galleggiamento

I liquidi, ed i fluidi in genere, esercitano delle forze sulle superfici solide con cui sono a contatto. Se consideriamo un fluido in quiete e una superficie infinitesima *dS*: il rapporto tra la forza esercitata dal fluido su tale superficie e l'area di tale superficie viene detto ***pressione*** e sarà pari a:

$$p = dF / dS$$

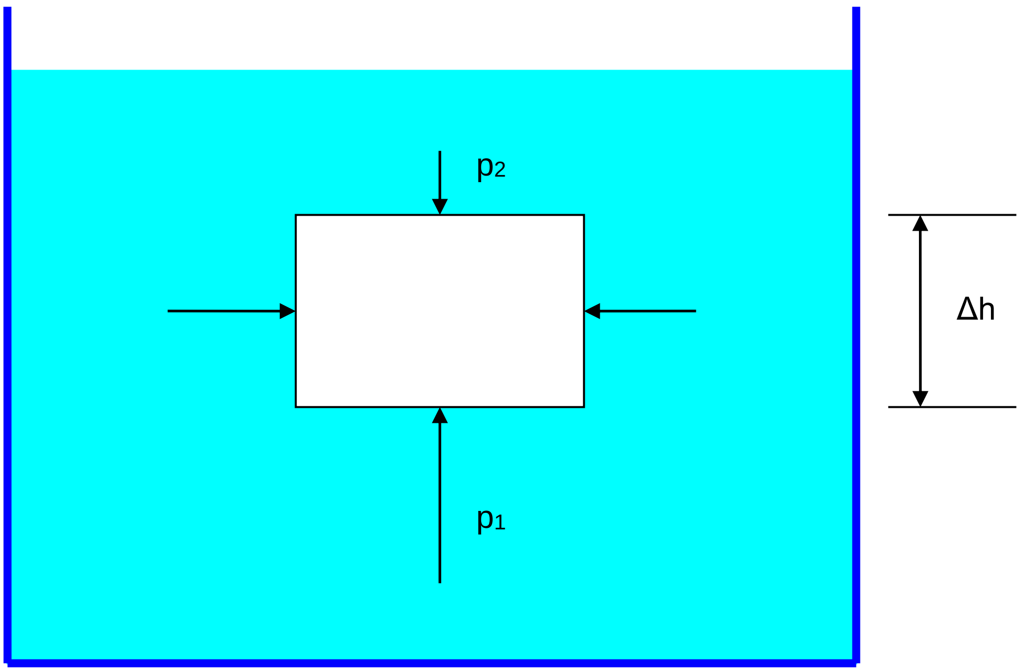
In ogni punto di un fluido in quiete la pressione *p* è indipendente dall'orientamento della superficie passante per il punto considerato (pressione idrostatica).

All'interno di un fluido in quiete la forza che fa variare la pressione è la forza-peso del liquido che si trova sopra quel punto quindi la pressione è costante in tutti i punti che si trovano alla stessa quota (**Legge di Pascal**) indipendentemente dalla direzione considerata.

Sempre all'interno di un fluido, tra le pressioni p_1 e p_2 misurate in punti che si trovano a quote diverse h_1 e h_2 vale la seguente relazione (**Legge di Stevino**):

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \qquad (2.18)$$

dove: ρ = densità del fluido, g = accelerazione di gravità



Infatti se consideriamo il volume parallelepipedo V, all'interno di una massa di fluido, sulla superficie della sua faccia inferiore di area *S* agirà la pressione p_1, diretta verso l'alto, che sarà pari alla pressione p_2 agente sulla sua faccia superiore incrementata della pressione dovuta alla forza peso della massa di fluido, pari a $\rho \cdot V$, contenuta nel volume V:

$$p_1 = p_2 + \rho \cdot V \cdot g / S$$

ma $V = S \cdot (h_1 - h_2)$ pertanto:

$$p_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

da cui la (2.18). Si noti che le pressioni agenti sulle facce verticali, agendo in direzioni opposte, si equilibrano tra loro.

Se il volume V, anziché essere occupato dal fluido circostante è occupato da un corpo di densità minore di quella del fluido, avverrà che sulla sua superficie inferiore alla quota h_1 agirà una pressione diretta verso il basso di entità minore della pressione idrostatica p_1 precedentemente calcolata e diretta verso l'alto. La risultante delle due pressioni sarà quindi diretta verso l'alto e provocherà il galleggiamento del corpo.
Se invece la densità media del corpo immerso è superiore a quella del fluido circostante la risultante delle forze di pressione che agiscono sulle sue superfici sarà diretta verso il basso ed il corpo affonderà.
La forza che dà luogo alla pressione p_1 rivolta verso l'alto è comunque sempre presente ed è detta "spinta di Archimede", essa è pari alla forza-peso del fluido spostato dall'oggetto in esso immerso.